Problema 21

Encontrar las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3\left(x^2+y^2+z^2\right)=1 \\ x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=xyz\left(x+y+z\right)^3 \end{cases}$$

Supongamos que x, sin pérdida de generalidad por simetría entre las variables, es cero. Entonces, la segunda ecuación se transforma en $y^2z^2=0$, con lo que o y o z valen también cero. Siendo, sin pérdida de generalidad nuevamente, $y=0$, se tiene que $3z^2=1$. Restaurando nuevamente la generalidad, se tienen las siguientes soluciones:

$$\left(x,y,z\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0,0\right); \qquad \left(x,y,z\right)=\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}},0\right); \qquad \left(x,y,z\right)=\left(0,0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right);$$

$$\left(x,y,z\right)=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},0,0\right); \qquad \left(x,y,z\right)=\left(0,-\frac{1}{\sqrt{3}},0\right); \qquad \left(x,y,z\right)=\left(0,0,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Supongamos entonces que ninguno de los (x,y,z) es cero. Es obvio que si (x,y,z) es una solución, también lo es $(-x,-y,-z)$. Podemos entonces elegir (x,y,z) de forma que su producto sea positivo, y restaurar más tarde la generalidad. Se tiene entonces, por la segunda ecuación, que su suma también es positiva.

Definamos ahora las siguientes variables auxiliares:

$$a=\frac{xyz}{x^2}=\frac{yz}{x}; \qquad b=\frac{xyz}{y^2}=\frac{xz}{y}; \qquad c=\frac{xyz}{z^2}=\frac{xy}{z}.$$

Por su definición, a, b y c son positivos. Podemos ahora transformar las ecuaciones que componen el sistema como:

$$bc+ac+ab=x^2+y^2+z^2=\frac{1}{3};$$

$$a+b+c=\frac{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}{xyz}=\left(x+y+z\right)^3.$$

Ahora bien, utilizando la desigualdad entre las medias aritmética y cuadrática, se tiene:

$$a^2+b^2+c^2=3\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\right)^2\geq\frac{\left(a+b+c\right)^3}{3};$$

$$\frac{1}{3} = bc + ac + ab = \frac{(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)}{2} \le \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{(x+y+z)^6}{3};$$

$$x + y + z \ge 1.$$

Se tiene entonces finalmente, utilizando nuevamente la desigualdad entre las medias aritmética y cuadrática, que:

$$\frac{1}{3} = \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \ge \frac{|x|+|y|+|z|}{3} \ge \frac{x+y+z}{3} \ge \frac{1}{3}.$$

Todas las desigualdades deben ser igualdades, lo cual es possible sólo si *x, y*, *z* son positivos e iguales entre sí, y por lo tanto iguales a 1/3. Restaurando la generalidad se tienen las dos nuevas soluciones, que son además únicas en el caso de que ninguno de los *x*, *y*, *z* sea cero:

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right); \qquad (x, y, z) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$