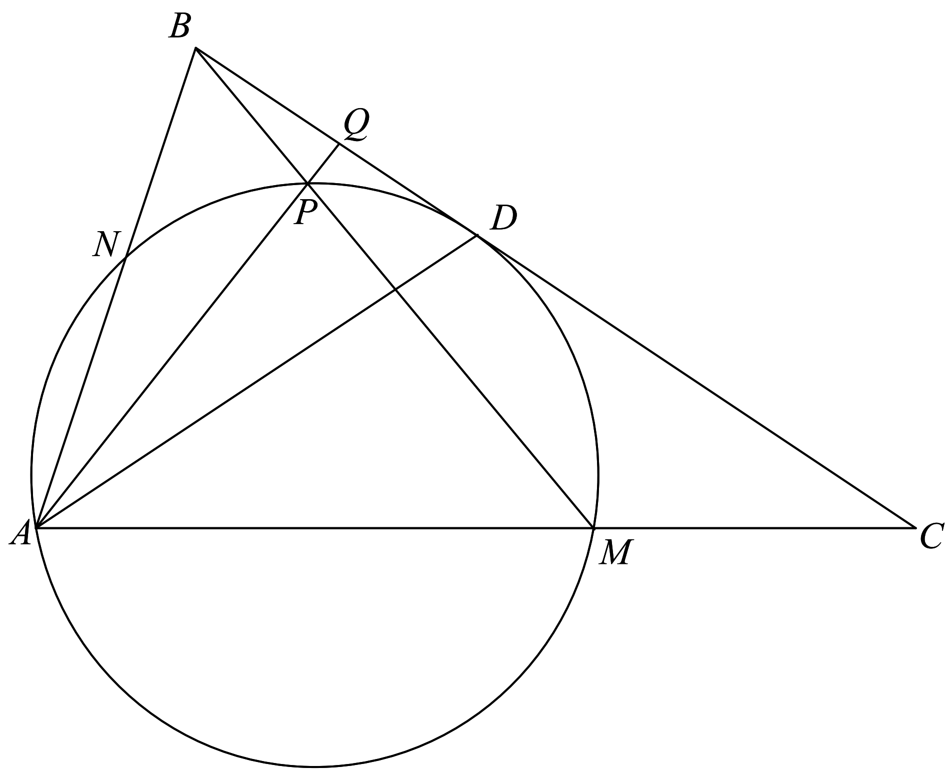
Problema 22

La bisectriz interior del ángulo *A* de un triángulo dado *ABC* corta a *BC* en el punto *D*. Sea *G* la circunferencia que pasa por *A* y es tangente a *BC* en el punto *D*. Si *M* es el otro punto de intersección de *G* con *AC*, y *BM* corta a *G* en el punto *P*, demostrar que *AP* es una mediana del triángulo *ABD*. (Nótese que el enunciado original en la página de red decía "mediana del triángulo *ABC*", pero esto es obviamente incorrecto, ya que como se demuestra a continuación, *AP* es mediana de *ABD*, y *D* es un punto de *BC* distinto de *C*.)



Llamaremos $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$. Por ser *AD* la bisectriz la bisectriz de *A*, se tiene que $\angle BAD=\angle CAD=A/2$. Al mismo tiempo, se tiene que $\angle ADB=\pi-\angle ADC$, luego $\sin(\angle ADB)=\sin(\angle ADC)$. Por lo tanto, aplicando el teorema del seno a los triángulos *ABD* y *ACD* se tiene que:

$$\frac{BD}{AB}=\frac{\sin(BAD)}{\sin(ADB)}=\frac{\sin(CAD)}{\sin(ADC)}=\frac{CD}{AC}.$$

Luego como $BD+CD=a$, es fácil deducir que:

$$CD = \frac{ab}{b+c}; \qquad BD = \frac{ac}{b+c}.$$

Por ser *D* el punto de tangencia de *BC* con *G*, se tiene que las potencias de *B* y *C* con respecto a *G* son, respectivamente:

$$\left(\frac{ac}{b+c}\right)^2 = BD^2 = BN \cdot BA = c \cdot BN;$$

$$\left(\frac{ab}{b+c}\right)^2 = CD^2 = CM \cdot CA = b \cdot CM.$$

Se ha definido *N* como el segundo punto donde *G* corta a *AB*. Se tiene entonces que:

$$\frac{CM}{AC} = \frac{CM}{b} = \left(\frac{a}{b+c}\right)^2 = \frac{BN}{c} = \frac{BN}{AB}.$$

Luego *MN* es paralela a *BC*, y los triángulos *ABC* y *ANM* son semejantes.

Sea ahora *Q* el punto en el que *AP* corta a *BC*. Se tiene entonces que $\angle BPQ = \angle APM$, y por ser *P* y *N* puntos del mismo arco de *G* definido por la cuerda *AM*, $\angle APM = \angle ANM = \angle ABC$. Luego $\angle BPQ = \angle ABC = \angle ABQ$. Al mismo tiempo, es obvio que $\angle BQP = \angle AQB$, por estar *A*, *P* y *Q* alineados. Luego los triángulos *AQB* y *BQP* son semejantes, con lo que:

$$\frac{QP}{QB} = \frac{BQ}{AQ}.$$

Se tiene entonces que la potencia de *Q* con respecto a *G* se puede escribir como:

$$QD^2 = QP \cdot QA = QB^2.$$

Por lo tanto, *QB*=*QD*, y *Q* es el punto medio de *BD*. Luego *AP* es una mediana de *ABD*, q.e.d..