

Problema 23

Se considera la ecuación

$$x^2 + (a+b+c)x + m(ab+bc+ac) = 0$$

en la que a, b, c son números reales estrictamente positivos, y m es un parámetro real.

Demostrar que:

- Si $m \leq 3/4$, entonces las raíces de la ecuación son reales.
- Si a, b, c son las longitudes de los lados de un triángulo y $m \geq 1$, entonces la ecuación no tiene raíces reales.

El discriminante Δ de la ecuación viene dado por:

$$\Delta = (a+b+c)^2 - 4m(ab+bc+ac) = a^2 + b^2 + c^2 - 2(2m-1)(ab+bc+ac).$$

a) Supongamos que las raíces de la ecuación no son reales. Entonces, el discriminante es negativo, es decir:

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(2m-1)(ab+bc+ac).$$

Pero la desigualdad del producto escalar aplicada a los vectores (a,b,c) y (b,c,a) nos garantiza que $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$, luego:

$$2(2m-1)(ab+bc+ac) > ab+bc+ac.$$

Por ser a, b, c positivos, se tiene que $ab+bc+ca$ también es positivo, con lo que:

$$2(2m-1) > 1;$$

$$m > \frac{3}{4}.$$

Por lo tanto, para que las raíces sean imaginarias, es decir, para que el discriminante sea negativo, debe darse que $m > 3/4$. Luego si $m \leq 3/4$, las raíces deben ser reales, q.e.d..

b) Al ser a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo, se verifican las siguientes desigualdades:

$$a+b-c > 0; \quad c+a-b > 0; \quad b+c-a > 0.$$

Multiplicándolas dos a dos se obtiene:

$$b^2 + c^2 - a^2 < 2bc; \quad c^2 + a^2 - b^2 < 2ca \quad a^2 + b^2 - c^2 < 2ab.$$

Finalmente, sumando estas tres nuevas desigualdades se obtiene que:

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca).$$

Por lo tanto, el discriminante cumple:

$$\Delta < 4(1 - m)(ab + bc + ac).$$

Luego para que las raíces sean reales, es decir, para que el discriminante sea no negativo, y al ser $ab+bc+ac$ positivo, debe cumplirse que $m < 1$. Luego si $m \geq 1$ la ecuación no tiene raíces reales, q.e.d..