Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Los dos primeros problemas que presentamos fueron propuestos en el distrito Universitario de Valladolid durante la 1ª fase de la XXXIX Olimpiada Matemática Española, celebrada en enero de 2003.

Problema 0.6.1: En un lejano planeta de otra galaxia hay dos formas de vida mutuamente hostiles: los Septicapita, que tienen 7 cabezas y dos patas, y los Pentápodos, que tienen 2 cabezas y 5 patas. Un día, un número impar de Septicapita se encuentra con un número impar de Pentápodos y se organiza un gran tumulto; un observador contó 180, entre cabezas y patas. ¿Cuántos ejemplares de cada clase intervinieron en la pelea?

Problema 0.6.2: Las bases de un trapecio miden a y b ($a > b$) y su altura es h. Las diagonales del trapecio son perpendiculares, y el ángulo entre los lados no paralelos del trapecio es $\boldsymbol{a}$.

Demostrar que se verifica $\frac{1}{h} = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)\cot \boldsymbol{a}$

Problema 0.6.3: (Olimpiada de Austria 2002)
El perímetro de un hexágono convexo ABCDEF es s, y los perímetros de los triángulos ACE y BDF son u y v, respectivamente.

1) Probar que $\frac{1}{2} < \frac{s}{u+v} < 1$
2) Determinar si 1 puede reemplazarse por un número más pequeño, o ½ por un número más grande, de modo que las correspondientes desigualdades sigan valiendo para cualesquiera hexágonos convexos.

Problema 0.6.4: (Olimpiada de Austria 2002)

Sea $b > 800$ un entero positivo. Determinar todas las 2002 - *uplas* de enteros no negativos (a_1 . a_2, ... , a_{2002}) tales que

$$\sum_{j=1}^{2002} a_j^{\,a_j} = 2002 \bullet b^b$$

Problema 0.6.5: (Olimpiada de Austria 2002)
Sean ABCD y AEFG cuadriláteros inscritos semejantes, cuyos vértices se nombran en sentido antihorario. Sea P el segundo punto común a las circunferencias circunscritas a ambos cuadriláteros. Demostrar que P pertenece a la recta BE.