

## OBSERVACIONES DIDÁCTICAS SOBRE EL NÚMERO $e$

**Francisco Bellot Rosado**

El nuevo currículo de 1º de Bachillerato en España vuelve a incluir (a mi entender acertadamente) el estudio de las sucesiones de números reales, y en particular el de la que permite definir el número  $e$ .

A continuación presento algunas observaciones para desarrollar ese estudio, dependiendo del "bagaje de conocimientos previos" de los estudiantes.

### Tratamiento tradicional

Después de haber introducido los conceptos básicos, y admitido (usualmente sin demostración) que toda sucesión creciente y acotada tiene límite, se considera

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

y se desarrolla utilizando el binomio de Newton :

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{n-1} \frac{1}{n^{n-1}} + \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + \frac{n}{n} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{n(n-1)}{n^2} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{n^n} \\ &= 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

El término siguiente,  $a_{n+1}$ , tiene un sumando más que  $a_n$ , y estos sumandos son mayores. Por lo tanto la sucesión es creciente.

Además está acotada :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots < \\ &< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots = 2 + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $(a_n)$  es convergente y su límite es

$$e = 2,718281828459045\dots$$

La experiencia en el aula de tener que introducir el número  $e$  a alumnos que no conocen el desarrollo del binomio de Newton o los números combinatorios (situación no deseable, pero perfectamente posible), me ha llevado a rastrear en la literatura existente algunos métodos alternativos. Recomiendo con énfasis estos dos libros :

a) Gabriel Klambauer : *Aspects of Calculus*, Springer 1986, ISBN 0-387-96274-3;

b) Ivan Niven : *Maxima and Minima without Calculus*, Mathematical Association of America (The Dolciani Math. Expositions 6), 1981;

sin olvidar, desde luego, el libro de Karl R. Stromberg, *An Introduction to Classical Real Analysis*, Wadsworth Intl. Group, 1981.

### Tratamientos alternativos

Ivan Niven no utiliza el binomio de Newton, aunque sí la desigualdad de las medias aritmética y geométrica :

Si

$$f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

se aplica la desigualdad de las medias aritmética y geométrica a los  $n + 1$  números

$$1, 1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}, \dots, 1 + \frac{1}{n},$$

cuya suma es  $n + 2$  y su producto  $f(n)$ . Entonces

$$\frac{n+2}{n+1} > (f(n))^{\frac{1}{n+1}} \Leftrightarrow \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} > f(n),$$

pero el primer miembro es precisamente

$$f(n+1) = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

así que la sucesión es creciente.

Por su parte, Klambauer utiliza un procedimiento muy ingenioso, pero fácil de entender, para probar que la sucesión es creciente y acotada. Comienza por un resultado previo :

Si  $0 \leq a < x$ , entonces

$$(n+1)a^n < \frac{x^{n+1} - a^{n+1}}{x-a} < (n+1)x^n. \quad (*)$$

En efecto,

$$\frac{x^{n+1} - a^{n+1}}{x-a} = x^n + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + \dots + a^{n-1}x + a^n,$$

y las dos cotas anunciadas se obtienen inmediatamente, la superior sustituyendo la  $a$  por  $x$ , y la inferior sustituyendo la  $x$  por  $a$ .

Para demostrar que la sucesión  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  es creciente se escribe la desigualdad (\*) de la derecha en la forma

$$x^n[x - (n+1)(x-a)] < a^{n+1},$$

y se eligen astutamente

$$x = 1 + \frac{1}{n}, \quad a = 1 + \frac{1}{n+1}.$$

De esta forma el término entre paréntesis se convierte en 1, y lo que queda es

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

que es lo que queríamos. Para ver que está acotada, se elige (no menos astutamente)

$$a = 1, x = 1 + \frac{1}{2n},$$

con lo que ahora la expresión entre corchetes se reduce a  $\frac{1}{2}$  y resulta la desigualdad

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n < 2 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} < 4;$$

como  $a_n < a_{n+1}$ , resulta

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} < 4$$

para todo natural  $n$ . Vemos así que

$$2 = a_1 \leq a_n < 4.$$

Es también posible, como hace Stromberg, utilizar la desigualdad de Bernoulli,

$$\text{Si } x > -1, \text{ entonces } (1+x)^n > 1+nx$$

que se puede demostrar por inducción sobre  $n \geq 2$  :

Para  $n = 2$ ,  $(1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x$ ;

si se cumple para cualquier  $n \geq 2$ , veamos que se cumple para  $n+1$  :

En efecto, como  $1+x > 0$ ,

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n > (1+x)(1+nx) \\ &= 1+(n+1)x+nx^2 > 1+(n+1)x \end{aligned}$$

y eso termina la etapa inductiva. Mediante esta desigualdad, Stromberg demuestra que si

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; \text{ y } b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

entonces  $(a_n)$  es creciente,  $(b_n)$  es decreciente, y ambas tienen el mismo límite.

# Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

[http://www.campus-oei.org/oim/revista\\_oim/](http://www.campus-oei.org/oim/revista_oim/)

Edita:

