

Problema 5.-

Se considera el triángulo ABC y sea M un punto del segmento BC.

Sean r_1, r_2, r , los inradios de los triángulos AMB, AMC y ABC; y sean s_1, s_2, s , los radios de los círculos situados en el interior del ángulo A y exinscritos a AMB, AMC y ABC, respectivamente.

Demostrar que se verifican las relaciones siguientes:

a) $p \cdot (r-r_1) \cdot (r-r_2) = (p-a) \cdot r_1 \cdot r_2$

b) $r \cdot (s_2-s_1) = s \cdot (r_2-r_1)$

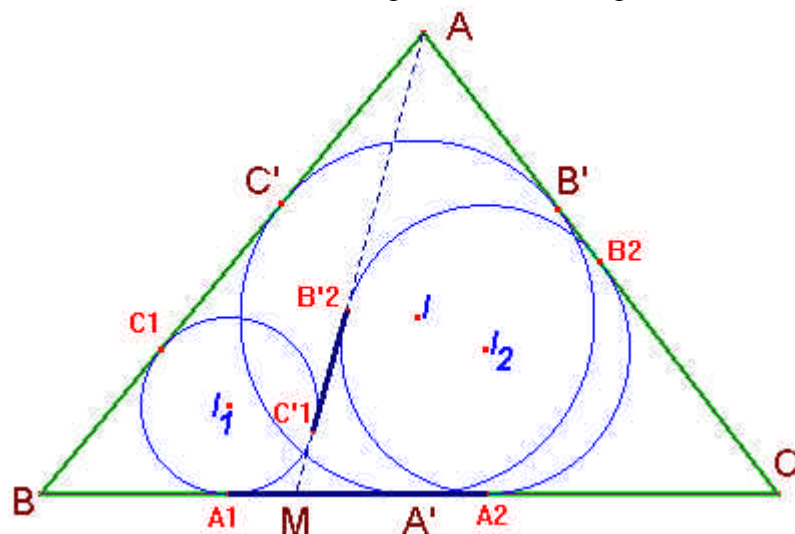
donde: $2p = a + b + c$

(Este resultado puede considerarse clásico)

Solución:

Cuestión a)

Para clarificar la situación, consideremos la siguiente situación gráfica:



donde se señalan los segmentos $C_1B'_2$ y A_1A_2 que son los segmentos de tangencia comunes, interior y exterior, a las circunferencias inscritas en los triángulos AMB y AMC, respectivamente. Según esto, podemos establecer las siguientes relaciones entre sus longitudes:

-Para la tangente interior $C_1B'_2$; $C_1B'_2 = AC_1 - AB'_2 = AC_1 - AB_2 = (c - BC_1) - (b - CB_2)$

Ahora bien, $BC_1 = p - b$ y $CB_2 = p - c$; y según las relaciones de semejanza existentes entre los siguientes pares de triángulos: BI_1C_1 y BIC' ; y CI_2B_2 y CIB' , podemos entonces

expresar que $BC_1 = x_1 = \frac{r_1}{r} \cdot (p - b)$ y que $CB_2 = x_2 = \frac{r_2}{r} \cdot (p - c)$.

Por tanto, obtenemos la siguiente relación entre longitudes:

$$I_1I_2^2 = (r_1 + r_2)^2 + C_1B'_2{}^2;$$

$$I_1I_2^2 = (r_1 + r_2)^2 + (c - x_1 - b + x_2)^2; (1)$$

-Para la tangente exterior A_1A_2 ; $A_1A_2 = a - x_1 - x_2$

Y así, obtenemos ahora la siguiente relación entre longitudes:

$$I_1I_2^2 = (r_2 - r_1)^2 + A_1A_2{}^2;$$

$$I_1I_2^2 = (r_2 - r_1)^2 + (a - x_1 - x_2)^2; (2)$$

- De las anteriores relaciones (1) y (2), deducimos la relación (3)

$$(r_1 + r_2)^2 + (c - x_1 - b + x_2)^2 = (r_2 - r_1)^2 + (a - x_1 - x_2)^2 \quad (3);$$

Tras un poco de álgebra llegamos a esta otra relación más simple:

$$a^2 - b^2 - c^2 + 2bc - 2 \cdot (a+b-c)x_1 - 2 \cdot (a-b+c)x_2 + 4x_1x_2 = 4 \cdot r_1r_2$$

$$a^2 - (b-c)^2 - 4(p-c)x_1 - 4(p-b)x_2 + 4x_1x_2 = 4 \cdot r_1r_2$$

$$(a-b+c) \cdot (a+b-c) - 4(p-c)x_1 - 4(p-b)x_2 + 4x_1x_2 = 4 \cdot r_1r_2$$

$$4 \cdot (p-b)(p-c) - 4(p-c)x_1 - 4(p-b)x_2 + 4x_1x_2 = 4 \cdot r_1r_2$$

Sustituyendo $x_1 = \frac{r_1}{r} \cdot (p-b)$ y $x_2 = \frac{r_2}{r} \cdot (p-c)$, obtenemos:

$$(p-b)(p-c) - \frac{r_1}{r} \cdot (p-b)(p-c) - \frac{r_2}{r} \cdot (p-c)(p-b) + \left(\frac{r_1}{r} \cdot (p-b)\right) \cdot \left(\frac{r_2}{r} \cdot (p-c)\right) = r_1r_2$$

Sea $\Delta = \text{Area del triángulo ABC}$; entonces $\Delta^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) = p^2 \cdot r^2$, tenemos que:

$(p-b)(p-c) = p \cdot r^2 / (p-a)$ y entonces sustituyendo esta expresión en la última relación conseguimos:

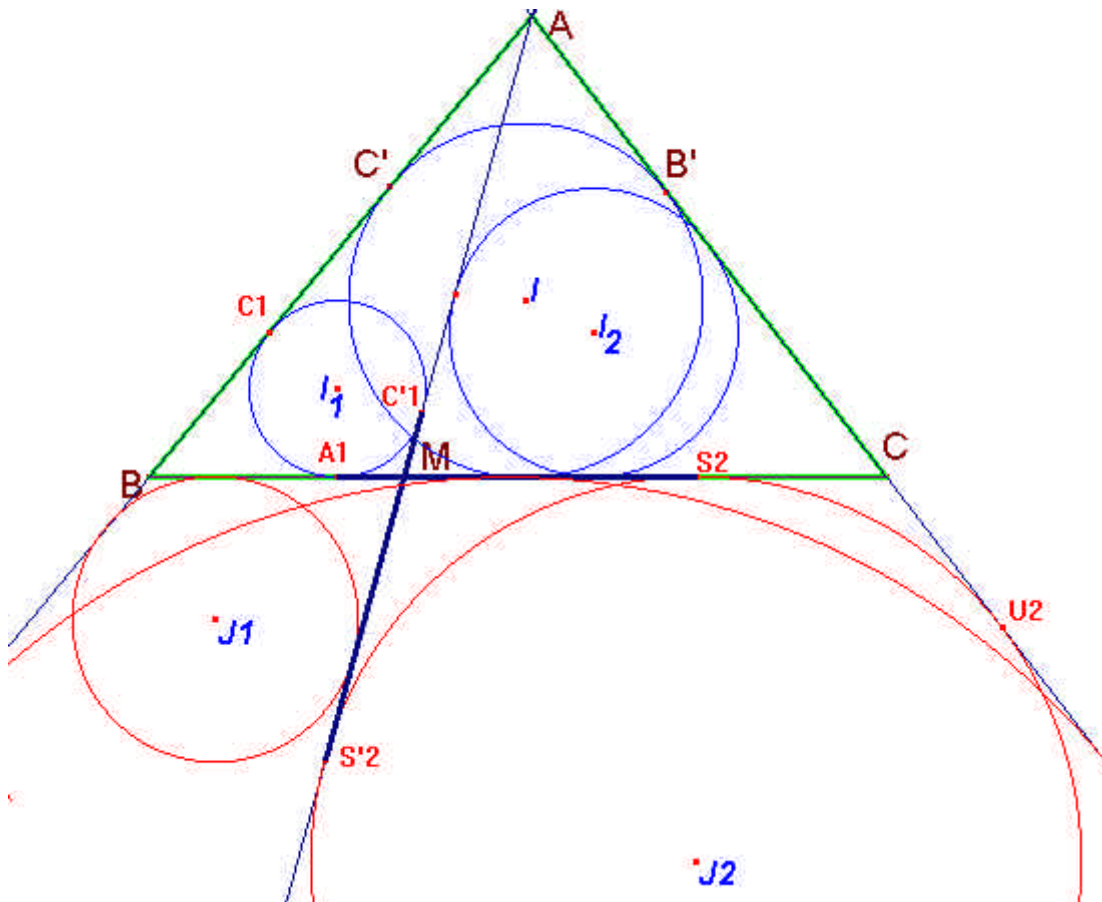
$$p \cdot r^2 / (p-a) - p \cdot r \cdot r_1 / (p-a) - p \cdot r \cdot r_2 / (p-a) + p \cdot r_1 \cdot r_2 / (p-a) = r_1r_2$$

$$p \cdot r^2 - p \cdot r \cdot r_1 - p \cdot r \cdot r_2 + p \cdot r_1 \cdot r_2 = (p-a) \cdot r_1r_2;$$

y, finalmente:

$$\mathbf{p \times (r - r_1) \times (r - r_2) = (p - a) \times r_1 r_2}$$

Cuestión b)



En este segundo caso, vamos a tener en cuenta los segmentos A_1S_2 y $C_1S'_2$ que son los segmentos de tangencia comunes, interiores ambos, a las circunferencias, la una inscrita al triángulo AMB y la otra exinscrita al triángulo AMC . Según esto, podemos establecer las siguientes relaciones entre sus longitudes:

-Para la tangente interior A_1S_2 ; $A_1S_2 = a - x_1 - y_2$

donde $x_1 = \frac{r_1}{r} \cdot (p - b)$ e $y_2 = \frac{s_2}{s} \cdot (p - b)$.

Por tanto, obtenemos la siguiente relación entre longitudes:

$$I_1J_2^2 = (r_1 + s_2)^2 + A_1S_2^2 ;$$

$$I_1J_2^2 = (r_1 + s_2)^2 + (a - x_1 - y_2)^2 ; (4)$$

-Para la otra tangente interior $C_1S'_2$; $C_1S'_2 = AS'_2 - AC_1 = AU_2 - AC_1 = (b + y_2) - (c - x_1)$

Y así, obtenemos ahora la siguiente relación entre longitudes:

$$I_1J_2^2 = (r_1 + s_2)^2 + C_1S'_2^2 ;$$

$$I_1J_2^2 = (r_1 + s_2)^2 + (b + y_2 - c + x_1)^2 ; (5)$$

- De las anteriores relaciones (4) y (5), deducimos la relación (6)

$$(r_1 + s_2)^2 + (a - x_1 - y_2)^2 = (r_1 + s_2)^2 + (b + y_2 - c + x_1)^2 \quad (6);$$

Con un poco de álgebra vamos obteniendo las siguientes identidades:

$$\cancel{(r_1 + s_2)^2} + (a - x_1 - y_2)^2 = \cancel{(r_1 + s_2)^2} + (b + y_2 - c + x_1)^2;$$

$$(a - x_1 - y_2)^2 - (b + y_2 - c + x_1)^2 = 0;$$

$$[(a - x_1 - y_2) + (b + y_2 - c + x_1)] \cdot [(a - x_1 - y_2) - (b + y_2 - c + x_1)] = 0;$$

$$[a + b - c] \cdot [a - b + c - 2 \cdot (x_1 + y_2)] = 0;$$

$$(p - b) - (x_1 + y_2) = 0;$$

Sustituyendo $x_1 = \frac{r_1}{r} \cdot (p - b)$ y $y_2 = \frac{s_2}{s} \cdot (p - b)$, obtenemos:

$$(p - b) - \left[\frac{r_1}{r} \cdot (p - b) + \frac{s_2}{s} \cdot (p - b) \right] = 0$$

$$r \cdot s - s \cdot r_1 - r \cdot s_2 = 0 \quad (7)$$

Si ahora actuamos de igual manera pero con los triángulos de radios r_2 y s_1 conseguiríamos la siguiente relación

$$r \cdot s - s \cdot r_2 - r \cdot s_1 = 0 \quad (7')$$

De ambas expresiones, (7) y (7') resulta finalmente:

$$r \cdot (s_2 - s_1) = s \cdot (r_2 - r_1)$$

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

<http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/>

Edita:

