Probar que

$$\sec^4\frac{\pi}{7}+\sec^4\frac{2\pi}{7}+\sec^4\frac{3\pi}{7} = 416$$

Mathematical Gazette 1907, vol.4, no.63.
Propuesto en la Revista Escolar de la OIM con el número 15.

Solución

En primer lugar utilizamos la siguiente identidad trigonométrica :

$$\sec^4\theta = 1+2\tan^2\theta+\tan^4\theta,$$

lo cual nos conduce a considerar la ecuación cuyas raíces sean

$$\tan^2\frac{r\pi}{7}, r = 1,2,3.$$

Para encontrar esta ecuación, primero buscaremos la ecuación cuyas raíces sean

$$\tan\frac{r\pi}{7}, r = 1,2,3,4,5,6.$$

Para ello, razonamos de la siguiente manera: Si

$$\tan 7\theta = 0, \mathit{entonces}\ 7\theta = r\pi \Rightarrow \theta = \frac{r\pi}{7}.$$

En este caso, se tiene:

$$7\tan\theta-35\tan^3\theta+21\tan^5\theta-\tan^7\theta = 0.$$

Así que, dividiendo por $\tan\theta$ llamando $y = \tan\theta$, resulta que las raíces de

$$y^6-21y^4+35y^2-7 = 0$$

son

$$\tan\frac{r\pi}{7}, r = 1,2,3,4,5,6.$$

Estas raíces son iguales y opuestas a pares;entonces, poniendo

$$y^2 = x,$$

las raíces de

$$x^3-21x^2+35x-7 = 0$$

son

$$\tan^2\frac{r\pi}{7}, r = 1,2,3.$$

Entonces, utilizando la identidad trigonométrica del principio de la solución, resulta que

$$\sum_{r=1,2,3}\sec^4\frac{r\pi}{7} = 3+2\sum\tan^2\frac{r\pi}{7}+\sum\tan^4\frac{r\pi}{7}$$
$$= 3+2\times 21+(21^2-2\times 35) = 416.$$

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI