Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
Número 7 (Mayo - Junio de 2003)
ISSN 1698-677X

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 7 (Mayo - Junio 2003)

ISSN – 1698-277X

ÍNDICE

Generalización de un problema de la Olimpiada Matemática Pan-africana, 2000.

Una compañía tiene $2n+1$ directivos. Las reglas de la compañía requieren que cualquier mayoría ($n+1$ o más) de directivos pueda abrir la caja fuerte, pero que ninguna minoría (n o menos) de directivos la pueda abrir. Se propone equipar la caja fuerte con c cerrraduras, de tal manera que la caja fuerte sólo se pueda abrir cuando estén disponibles las llaves de todas las cerraduras, y dar a cada directivo un conjunto de llaves distintas. Cada directivo debe tener el mismo número de llaves.

¿Cuál es el mínimo número de cerraduras c con el que hay que equipar a la caja fuerte para que la anterior distribución sea posible?

¿Cuál es el número l de llaves se darían a cada directivo en caso de utilizar dicho número mínimo de cerraduras?

Sea A el conjunto formado por los conjuntos de exactamente n directivos distintos de la compañía. El número de elementos de A es, obviamente:

$$\operatorname{card}(A) = \binom{2n+1}{n}.$$

Sean ahora a_1, a_2 dos elementos distintos cualesquiera de A. Llamaremos B_1, B_2 a los conjuntos de cerraduras que no pueden ser abiertas juntando todas las llaves de los directivos que pertenecen a a_1 y a_2, respectivamente. Como a_1 y a_2 son distintos, su unión tiene por lo menos $n+1$ directivos, y constituye una mayoría, con lo que juntando todas sus llaves se pueden abrir todas las cerraduras. Ahora bien, juntando todas sus llaves, se pueden abrir todas las cerraduras excepto la intersección de B_1 y B_2. Luego B_1 y B_2 son disjuntos. Luego para cada elemento de A, existe al menos una cerradura que no puede ser abierta por los directivos que lo componen, y que además puede ser abierta por los directivos (pero no necesariamente todos) que componen cualquier otro elemento de A. Debe haber por lo tanto un número de cerraduras mayor o igual al cardinal de A:

$$c \geq \binom{2n+1}{n}.$$

Nótese que la igualdad se da si y solamente si existe exactamente una cerradura que no puede ser abierta juntando las llaves de todos los directivos de cada elemento de A.

Supongamos que se da la igualdad, y sea a un elemento cualquiera de A. Para la cerradura que no puede ser abierta por los directivos que conforman a, todos los demás directivos deben tener copia de la llave que la abre. En caso de existir otro directivo, no de a, que no tuviera copia de dicha llave, uniéndolo a los directivos de a se tendría un conjunto de n+1 directivos, es decir, una mayoría, que no podría abrir dicha cerradura, que es absurdo. Luego para cada cerradura existen exactamente n+1 copias de la llave que la abre. El número de llaves que deben ser dadas a cada directivo es entonces:

$$l = \frac{\text{cerraduras} \cdot \text{copias de cada llave}}{\text{directivos}} = \frac{\frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!} \cdot (n+1)}{2n+1} = \frac{(2n)!}{n!n!} = \binom{2n}{n}.$$

La distribución se puede hacer trivialmente como sigue: numeraremos $a_1,a_2,\ldots,a_c$ a los elementos de A, y $b_1,b_2,\ldots,b_c$ a las cerraduras. Daremos copias de la llave b_i a un directivo si y sólo si no pertenece a a_i, es decir, hay exactamente n+1 copias de cada llave que se han entregado a n+1 directivos distintos. Demostraremos ahora que en dicho caso las condiciones del problema se cumplen.

Supongamos que una mayoría no puede abrir la caja fuerte, pues no tiene llave para una cerradura b. Entonces, se tiene que el número de directivos en dicha mayoría, que es mayor o igual que n+1, más el número de directivos que tiene copia de la llave que abre b, que es exactamente n+1, sumarían al menos 2n+2, que es mayor que el número total de directivos, que es absurdo. Luego cada mayoría puede abrir la caja fuerte.

Sea una minoría cualquiera. Obviamente, al tener como máximo n directivos, es subconjunto de al menos un elemento a_i de A. Pero los directivos de a_i no pueden abrir b_i ni aún juntando todas sus llaves, luego ninguna minoría puede abrir la caja fuerte.

Nótese finalmente que, por la forma en la que se han repartido las llaves, y al pertenecer cada directivo al mismo número de elementos de A, que por simetría todos los directivos poseen el mismo número de llaves.

Luego todas las reglas de la compañía se cumplen, y el número mínimo de cerraduras a instalar en la caja fuerte, c, y el número de llaves que cada directivo tiene en ese caso, l, son:

$$c = \binom{2n+1}{n}; \qquad\qquad l = \binom{2n}{n}.$$

OBSERVACIONES DIDÁCTICAS SOBRE EL NÚMERO e

Francisco Bellot Rosado

El nuevo currículo de 1º de Bachillerato en España vuelve a incluir (a mi entender acertadamente) el estudio de las sucesiones de números reales, y en particular el de la que permite definir el número e.

A continuación presento algunas observaciones para desarrollar ese estudio, dependiendo del ”bagaje de conocimientos previos” de los estudiantes.

Tratamiento tradicional

Después de haber introducido los conceptos básicos, y admitido (usualmente sin demostración) que toda sucesión creciente y acotada tiene límite, se considera

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

y se desarrolla utilizando el binomio de Newton :

$$\begin{aligned} a_n &= 1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\cdots+\binom{n}{n-1}\frac{1}{n^{n-1}}+\frac{1}{n^n} \\ &= 1+\frac{n}{n}+\frac{1}{2!}\bullet\frac{n(n-1)}{n^2}+\frac{1}{3!}\bullet\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}+\cdots+\frac{1}{n!}\bullet\frac{n!}{n^n} \\ &= 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

El término siguiente, a_{n+1}, tiene un sumando más que a_n, y estos sumandos son mayores. Por lo tanto la sucesión es creciente.

Además está acotada :

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots < \\ &< 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots = 2+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3 \end{aligned}$$

Por lo tanto (a_n) es convergente y su límite es

$$e = 2,718281828459045\cdots$$

La experiencia en el aula de tener que introducir el número e a alumnos que no conocen el desarrollo del binomio de Newton o los números combinatorios (situación no deseable, pero perfectamente posible), me ha llevado a rastrear en la literatura existente algunos métodos alternativos. Recomiendo con énfasis estos dos libros :

a) Gabriel Klambauer :*Aspects of Calculus*,Springer 1986, ISBN 0-387-96274-3;

b) Ivan Niven : *Maxima and Minima without Calculus*, Mathematical Association of America (The Dolciani Math.Expositions 6), 1981;

sin olvidar, desde luego, el libro de Karl R.Stromberg, *An Introduction to Classical Real Analysis, Wadsworth Intl.Group*, 1981.

Tratamientos alternativos

Ivan Niven no utiliza el binomio de Newton, aunque sí la desigualdad de las medias aritmética y geométrica :

Si

$$f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

se aplica la desigualdad de las medias aritmética y geométrica a los $n+1$ números

$$1, 1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}, \cdots, 1 + \frac{1}{n},$$

cuya suma es $n+2$ y su producto $f(n)$. Entonces

$$\frac{n+2}{n+1} > (f(n))^{\frac{1}{n+1}} \Leftrightarrow \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} > f(n),$$

pero el primer miembro es precisamente

$$f(n+1) = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

así que la sucesión es creciente.

Por su parte, Klambauer utiliza un procedimiento muy ingenioso, pero fácil de entender, para probar que la sucesión es creciente y acotada. Comienza por un resultado previo :

Si $0 \leq a < x,$ entonces

$$(n+1)a^n < \frac{x^{n+1} - a^{n+1}}{x - a} < (n+1)x^n. \quad (*)$$

En efecto,

$$\frac{x^{n+1} - a^{n+1}}{x - a} = x^n + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + \cdots + a^{n-1}x + a^n,$$

y las dos cotas anunciadas se obtienen inmediatamente, la superior sustituyendo la a por x, y la inferior sustituyendo la x por a.

Para demostrar que la sucesión $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ es creciente se escribe la desigualdad (*) de la derecha en la forma

$$x^n[x - (n+1)(x - a)] < a^{n+1},$$

y se eligen astutamente

$$x = 1 + \frac{1}{n}, \;\; a = 1 + \frac{1}{n+1}.$$

De esta forma el término entre paréntesis se convierte en 1, y lo que queda es

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

que es lo que queríamos. Para ver que está acotada, se elige (no menos astutamente)

$$a = 1, x = 1 + \frac{1}{2n},$$

con lo que ahora la expresión entre corchetes se reduce a $\frac{1}{2}$ y resulta la desigualdad

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n < 2 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} < 4;$$

como $a_n < a_{n+1},$ resulta

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} < 4$$

para todo natural n. Vemos así que

$$2 = a_1 \leq a_n < 4.$$

Es también posible, como hace Stromberg, utilizar la desigualdad de Bernouilli,

$$\text{Si } x > -1, \text{ entonces } (1+x)^n > 1+nx$$

que se puede demostrar por inducción sobre $n \geq 2$:
Para $n = 2,\ (1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x$;
si se cumple para cualquier $n \geq 2,$ veamos que se cumple para $n+1$:
En efecto, como $1+x > 0,$

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n > (1+x)(1+nx) \\ &= 1+(n+1)x+nx^2 > 1+(n+1)x\end{aligned}$$

y eso termina la etapa inductiva. Mediante esta desigualdad, Stromberg demuestra que si

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n; \text{ y } b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

entonces (a_n) es creciente,(b_n) es decreciente, y ambas tienen el mismo límite.

UN PROBLEMA DE LA OLIMPIADA URSS

En la ciudad de "Camorra" hay 10000 habitantes. Dos cualesquiera de ellos o son amigos , o son enemigos.

Cada día, a lo sumo uno de sus habitantes se pelea con todos sus amigos y, simultáneamente, se hace amigo de todos sus enemigos; además de esto, en cualquier conjunto de tres habitantes , los tres se hacen amigos entre sí. Demostrar que en un cierto número de días, todos los habitantes son amigos . ¿Cuál es el menor número de días suficiente para ello?

SOLUCIÓN

Sean A, B y C tres habitantes cualesquiera de la ciudad. Es evidente que puede suceder que los tres sean amigos; también es posible que uno de ellos (pongamos A) no sea amigo de B ni de C, pero B y C sean amigos.
Entonces, para que A, B y C sean amigos, es suficiente que A se pelee con todos sus amigos y luego se haga amigo de todos sus enemigos.
También es fácil ver que los otros dos casos posibles,

- los tres habitantes, A, B y C son enemigos;
- uno de los habitantes (A) es amigo de B y C, pero B y C son enemigos;

son imposibles. En efecto, en ambos casos, entre los tres pares (A,B),(A,C),(B,C) de los habitantes de la ciudad, existe un número impar *c* (igual a 3 ó a 1) de parejas de enemigos, y un número par *e* (igual a 0 ó a 2) de pares de amigos. En todos los casos en que A,B ó C se pelean con todos sus amigos y se hacen amigos de sus enemigos, el número impar *c* y el número par *e* o no cambian o son reemplazados por un número impar *c'* y un número par *e'*, respectivamente. Luego de aquí se deduce que las tres personas A,B y C no pueden hacerse amigos, porque *c* no puede ser igual a 0.

La descripción de las *relaciones de amistad* entre tres personas A,B,C muestra que para la población entera esas relaciones pueden describirse de la manera siguiente:

Hay dos grupos de habitantes, M,N tales que cada uno de los habitantes de la ciudad pertenecen a M o a N (pero no a los dos), tales que dos elementos cualesquiera de una de ellas son amigos, y dos habitantes pertenecientes uno a M y otro a N son enemigos.

Probemos esta afirmación. En efecto, añadamos a los tres habitantes A,B,C otro habitante D. Si A y B son amigos, y D es amigo de, al menos, uno de ellos, entonces D también es amigo de ambos, y uno de los grupos está formado por A,B,D.

Si A y B son enemigos, entonces D es amigo solamente de uno de ellos. Este argumento demuestra que es posible dividir (A,B,C,D) en las dos partes, M y N (alguna de ellas puede ser vacía, por ejemplo cuando todos son amigos). Procediendo de esta forma, añadiendo consecutivamente nuevas personas al grupo, se prueba la posibilidad de dividir los 10000 habitantes en los dos grupos M y N.

Ahora estamos en condiciones de probar la afirmación del problema. Si todos los habitantes son amigos, no hay nada que demostrar. Si ninguna de las dos partes M y N es vacía, entonces es suficiente que cada día uno de los miembros de M deje el grupo y se una al otro grupo, N. Si el número de elementos de M es *k,* entonces todos los habitantes de la ciudad se pueden convertir en amigos en *k* días. Se sigue entonces que el período de 5000 días (aproximadamente 14 años) es suficiente para que todos los habitantes de la ciudad sean amigos, pues al menos una de las partes M ó N no puede tener más de 5000 personas.

PROBLEMAS DE NIVEL MEDIO Y DE OLIMPIADAS (7)

Presentamos a continuación algunos problemas propuestos en la Fase local de Cataluña de la XXXIX Olimpiada Matemática Española, en diciembre de 2002.

O7.1: En el plano se considera una recta r, un punto $P \in r$ y un punto $Q \notin r$.

Para cada punto $R \in r$ se considera el número

$$\lambda = \frac{PR + PQ}{QR}.$$

a) Búsquense los valores máximo y mínimo del número λ y dígase donde debe estar situado el punto R para obtener este máximo y este mínimo.

b) ¿A qué valor tiende λ cuando el punto R tiende a infifnito?

O7.2 : Un jugador de tenis quiere enfrentarse a dos rivales, A y B, para adquirir prestigio con buenos resultados. La probabilidad que tiene de ganar al jugador A es más pequeña que la de ganar a B, porque el primero es de más categoría en el ranking. Se le ofrecen tres partidos, de los cuales ha de ganar al menos dos seguidos, y puede elegir la secuencia de partidos: o bien A-B-A, o bien B-A-B.

¿Qué secuencia de partidos le es más favorable?

O7.3 : Sea ABC un triángulo.

a) Determinar los puntos P del plano del triángulo que cumplen la condición

$$Area(PAB) = Area(PBC) = Area(PCA).$$

b) Sea P un punto interior del triángulo que verifica la condición anterior, y sean P_1, P_2, P_3 los puntos interiores a los triángulos PBC,PCA y PAB en las mismas condiciones. Determinar el área del triángulo $P_1P_2P_3$ en función del área del triángulo ABC.

O7.4 : Con dos letras, a, b, se forman las infinitas palabras que tienen un número finito de letras y se ordenan alfabéticamente.

a) ¿Qué palabras tienen una palabra inmediatamente posterior?

b)¿Qué palabras tienen una palabra inmediatamente anterior?

c) Demostrar que si una palabra p_1 es anterior a una palabra p_2, y p_2 acaba en b, entonces entre p_1 y p_2 hay palabras que terminan en a y palabras que terminan en b.

PROBLEMAS PARA LOS MÁS JÓVENES (7)

Presentamos a continuación los problemas propuestos en la Fase local de la XI Olimpiada Matemática Provincial de Valladolid, celebrada el 29 de abril de 2003 y organizada por la Sociedad Castellano-Leonesa del Profesorado de Matemáticas. Agradecemos muy sinceramente a su Presidenta, Prof. Inmaculada Fernández Benito, su amabilidad al proporcionárnoslos.

XI Olimpiada Matemática Provincial (Valladolid)
Nivel : 2º E.S.O. (13 años de edad)

1. Según afirma una noticia periodística, el 20% de la humanidad dispone del 80% de la riqueza mundial.
Suponiendo que tal afirmación sea cierta, ¿cuántas veces es más rica una persona incluida en este 20% que otra del resto de la humanidad?

2. Tres amigos tienen 21 botes de su refresco preferido. 7 de ellos están llenos, 7 vacíos y 7 llenos hasta la mitad. ¿Cómo deben repartirse los botes para que los tres se lleven el mismo número de botes y la misma cantidad de refresco? (No se puede trasvasar refresco de un bote a otro).

3. Inicialmente hay un 1 en la pantalla de la calculadora. Al apretar la tecla A se multiplica por 3, y al apretar la tecla B se resta 1 del número de la pantalla. Utilizando varias veces las teclas A y B hay que obtener el número 97. ¿Cuál es el número mínimo de veces que se deben pulsar cada una de las teclas? ¿En qué orden?

4. Si tomas un cuadrado de papel, ¿cómo se puede doblar para obtener otro cuadrado cuya área sea la mitad del de partida? Explícalo detenidamente.

Nivel : 4º de E.S.O. (15 años de edad)

1. Cora, Berta, Sara, Diego, Ezequiel y Federica son coleccionistas de cuadros y dos de ellos son hermanos. Un día fueron a una exposición y compraron de la siguiente manera:

. Cora compró 1 cuadro, Berta 2, Sara 3, Diego 4, Ezequiel 5 y Federica 6.
. Los dos hermanos pagaron la misma cantidad por cada uno de los cuadros que compraron.
. Los demás del grupo pagaron por cada cuadro el doble de lo que pagaron los hermanos por cada uno de los suyos.
. En total pagaron 100000 euros.
. El precio de cada cuadro era un número entero de euros.
¿Quiénes son hermanos?

2. ABC es un triángulo equilátero; BCDE es un cuadrado de lado 2 construido exteriormente al triángulo. Los vértices A, D y E pertenecen a la misma circunferencia. Halla el valor del radio de la circunferencia.
3. Hallar cinco enteros consecutivos tales que la suma de los cuadrados de los tres primeros coincida con la suma de los cuadrados de los dos últimos.
4. Estás dentro de un círculo de siete velas encendidas. Pero las velas son mágicas, porque, cuando actúas sobre una de ellas también cambia es estado de las dos adyacentes. ¿Cómo se puede conseguir que todas las velas estén apagadas?

<u>Problema 5.-</u>

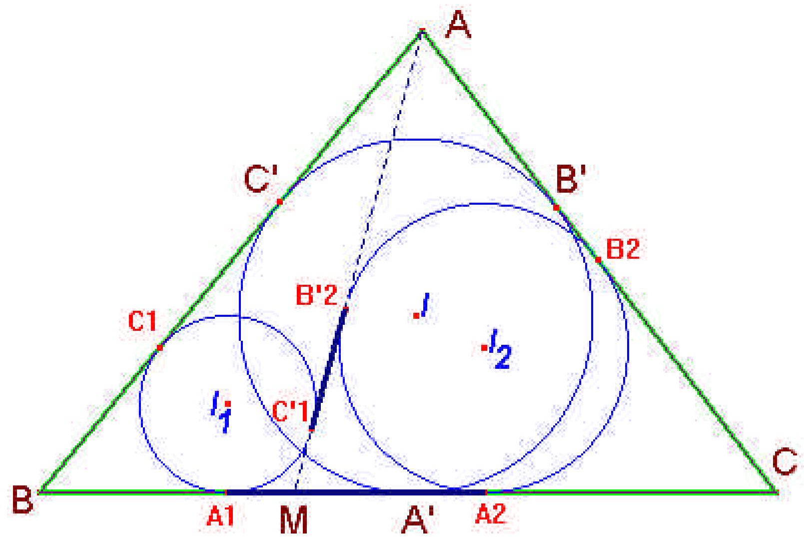
Se considera el triángulo ABC y sea M un punto del segmento BC.
Sean r_1, r_2, r, los inradios de los triángulos AMB, AMC y ABC ; y sean s_1, s_2, s, los radios de los círculos situados en el interior del ángulo A y exinscritos a AMB.AMC yABC, respectivamente.
Demostrar que se verifican las relaciones siguientes:

a) $p\cdot(r-r_1)\cdot(r-r_2)=(p-a)\cdot r_1\cdot r_2$
b) $r\cdot(s_2-s_1)=s\cdot(r_2-r_1)$

donde: $2p = a+ b+ c$
(Este resultado puede considerarse clásico)

<u>Solución:</u>

Cuestión a)
Para clarificar la situación, consideremos la siguiente situación gráfica:



donde se señalan los segmentos $C'_1B'_2$ y A_1A_2 que son los segmentos de tangencia comunes, interior y exterior, a las circunferencias inscritas en los triángulos AMB y AMC, respectivamente. Según esto, podemos establecer las siguientes relaciones entre sus longitudes:

-Para la tangente interior $C'_1B'_2$; $C'_1B'_2= AC'_1-AB'_2 = AC_1-AB_2 = (c-BC_1) - (b-CB_2)$
Ahora bien, $BC'= p-b$ y $CB'= p-c$; y según las relaciones de semejanza existentes entre los siguientes pares de triángulos: BI_1C_1 y BIC'; y CI_2B_2 y CIB', podemos entonces expresar que $BC_1= x_1=\frac{r_1}{r}.(p-b)$ y que $CB_2= x_2= \frac{r_2}{r}.(p-c)$.
Por tanto, obtenemos la siguiente relación entre longitudes:
$I_1I_2^{\,2} = (r_1+ r_2)^2 + C'_1B'_2{}^{\,2}$;
$I_1I_2^{\,2} = (r_1+ r_2)^2 + (c-x_1-b + x_2)^2$; (1)

-Para la tangente exterior A_1A_2; $A_1A_2 = a-x_1-x_2$
Y así, obtenemos ahora la siguiente relación entre longitudes:
$I_1I_2^{\,2} = (r_2- r_1)^2 + A_1A_2^{\,2}$;
$I_1I_2^{\,2} = (r_2- r_1)^2 + (a-x_1-x_2)^2$; (2)

- De las anteriores relaciones (1) y (2), deducimos la relación (3)
$(r_1+ r_2)^2 + (c–x_1–b + x_2)^2 = (r_2– r_1)^2 + (a–x_1–x_2)^2$ (3);
Tras un poco de álgebra llegamos a esta otra relación más simple:
$a^2 –b^2 –c^2 +2bc – 2·(a+b–c)x_1 –2·(a–b+c)x_2 +4x_1x_2 = 4·r_1r_2$
$a^2–(b–c)^2 –4(p–c)x_1–4(p–b)x_2 + 4x_1x_2 = 4·r_1r_2$
$(a–b+c)·(a+b–c) –4(p–c)x_1–4(p–b)x_2 + 4x_1x_2 = 4·r_1r_2$
$4·(p–b)(p–c) –4(p–c)x_1–4(p–b)x_2 + 4x_1x_2 = 4·r_1r_2$

Sustituyendo $x_1=\frac{r_1}{r}.(p-b)$ y $x_2= \frac{r_2}{r}.(p-c)$, obtenemos:

$$(p–b)(p–c) – \frac{r_1}{r}.(p-b)\,(p–c)– \frac{r_2}{r}.(p-c)\,(p–b)+ \left(\frac{r_1}{r}.(p-b)\right)·\left(\frac{r_2}{r}.(p-c)\right)= r_1r_2$$

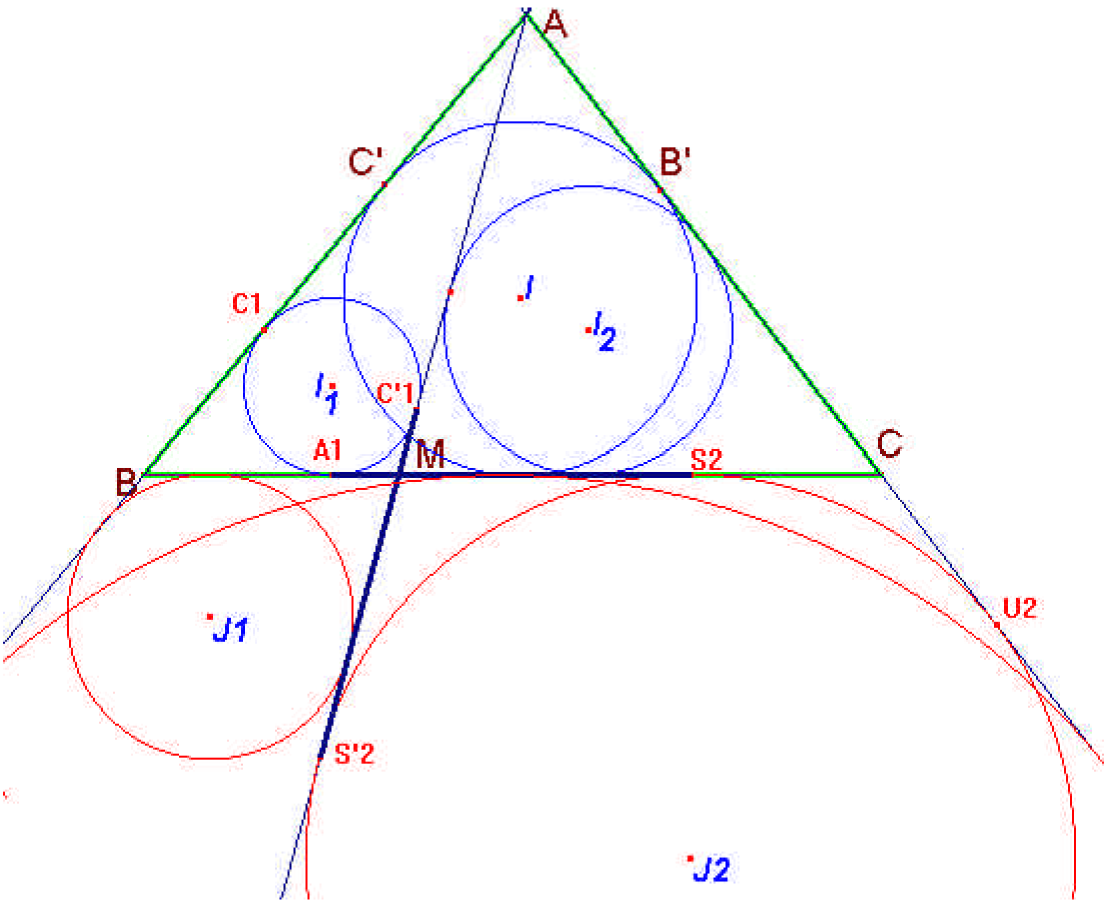
Sea Δ=Area del triángulo ABC; entonces $\Delta^2= p(p–a)(p–b)(p–c)= p^2·r^2$, tenemos que:
$(p–b)(p–c)= p·r^2/(p–a)$ y entonces sustituyendo esta expresión en la última relación conseguimos:
$p·r^2/(p–a) – p·r·r_1 /(p–a)– p·r·r_2 /(p–a)+ p·r_1·r_2 /(p–a)= r_1r_2$

$p·r^2 – p·r·r_1– p·r·r_2 + p·r_1·r_2 = (p–a)·r_1r_2$;

y, finalmente:

$$\mathbf{p·(r-r_1)·(r-r_2) = (p-a)·r_1r_2}$$

Cuestión b)



En este segundo caso, vamos a tener en cuenta los segmentos A_1S_2 y $C'_1S'_2$ que son los segmentos de tangencia comunes, interiores ambos, a las circunferencias, la una inscrita al triángulo AMB y la otra exinscrita al triángulo AMC. Según esto, podemos establecer las siguientes relaciones entre sus longitudes:

-Para la tangente interior A_1S_2; $A_1S_2 = a - x_1 - y_2$

donde $x_1 = \frac{r_1}{r}.(p-b)$ e $y_2 = \frac{s_2}{s}.(p-b)$.

Por tanto, obtenemos la siguiente relación entre longitudes:

$I_1J_2^2 = (r_1 + s_2)^2 + A_1S_2^{\ 2}$;

$I_1J_2^2 = (r_1 + s_2)^2 + (a - x_1 - y_2)^2$; (4)

-Para la otra tangente interior $C'_1S'_2$; $C'_1S'_2 = AS'_2 - AC'_1 = AU_2 - AC_1 = (b + y_2) - (c - x_1)$

Y así, obtenemos ahora la siguiente relación entre longitudes:

$I_1J_2^2 = (r_1 + s_2)^2 + C'_1S'_2{}^2$;

$I_1J_2^2 = (r_1 + s_2)^2 + (b + y_2 - c + x_1)^2$; (5)

- De las anteriores relaciones (4) y (5), deducimos la relación (6)

$(r_1+ s_2)^2 + (a-x_1-y_2)^2 = (r_1+ s_2)^2 + (b+ y_2 -c + x_1)^2$ (6);

Con un poco de álgebra vamos obteniendo las siguientes identidades:

$\cancel{(r_1+ s_2)^2} + (a-x_1-y_2)^2 = \cancel{(r_1+ s_2)^2} + (b+ y_2 -c + x_1)^2$;

$(a-x_1-y_2)^2-(b+ y_2 -c + x_1)^2 = 0$;

$[(a-x_1-y_2)+(b+ y_2 -c + x_1)]\cdot[(a-x_1-y_2)-(b+ y_2 -c + x_1)] = 0$;

$[a + b -c]\cdot[a - b + c -2\cdot(x_1+y_2)] = 0$;

$(p- b)-(x_1+ y_2) = 0$;

Sustituyendo $x_1=\frac{r_1}{r}.(p-b)$ y $y_2=\frac{s_2}{s}.(p-b)$, obtenemos:

$(p-b) -[\frac{r_1}{r}.(p-b)+\frac{s_2}{s}.(p-b)]= 0$

$r\cdot s - s\cdot r_1 - r\cdot s_2 = 0$ (7)

Si ahora actuamos de igual manera pero con los triángulos de radios r_2 y s_1 conseguiríamos la siguiente relación

$r\cdot s - s\cdot r_2 - r\cdot s_1 = 0$ (7')

De ambas expresiones, (7) y (7') resulta finalmente:

$$\mathbf{r\times(s_2-s_1) = s\times(r_2-r_1)}$$

Probar que

$$\sec^4\frac{\pi}{7}+\sec^4\frac{2\pi}{7}+\sec^4\frac{3\pi}{7} = 416$$

Mathematical Gazette 1907, vol.4, no.63.
Propuesto en la Revista Escolar de la OIM con el número 15.
Solución
En primer lugar utilizamos la siguiente identidad trigonométrica :

$$\sec^4\theta = 1+2\tan^2\theta+\tan^4\theta,$$

lo cual nos conduce a considerar la ecuación cuyas raíces sean

$$\tan^2\frac{r\pi}{7}, r = 1,2,3.$$

Para encontrar esta ecuación, primero buscaremos la ecuación cuyas raíces sean

$$\tan\frac{r\pi}{7}, r = 1,2,3,4,5,6.$$

Para ello, razonamos de la siguiente manera: Si

$$\tan 7\theta = 0, \mathit{entonces}\ 7\theta = r\pi \Rightarrow \theta = \frac{r\pi}{7}.$$

En este caso, se tiene:

$$7\tan\theta-35\tan^3\theta+21\tan^5\theta-\tan^7\theta = 0.$$

Así que, dividiendo por $\tan\theta$ llamando $y = \tan\theta$, resulta que las raíces de

$$y^6-21y^4+35y^2-7 = 0$$

son

$$\tan\frac{r\pi}{7}, r = 1,2,3,4,5,6.$$

Estas raíces son iguales y opuestas a pares;entonces, poniendo

$$y^2 = x,$$

las raíces de

$$x^3-21x^2+35x-7 = 0$$

son

$$\tan^2\frac{r\pi}{7}, r = 1,2,3.$$

Entonces, utilizando la identidad trigonométrica del principio de la solución, resulta que

$$\sum_{r=1,2,3}\sec^4\frac{r\pi}{7} = 3+2\sum\tan^2\frac{r\pi}{7}+\sum\tan^4\frac{r\pi}{7}$$
$$= 3+2\times 21+(21^2-2\times 35) = 416.$$

UN PROBLEMA DE KVANT

En la revista rusa Kvant se propuso, hace algunos años, el siguiente problema:
Demostrar que

$$\sum_{k=2}^{n}[\log_k n] = \sum_{k=2}^{n}[\sqrt[k]{n}\,].$$

Solución 1(*Mª A.López Chamorro*)

Sea $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$2^{k_0-1} \leq n < 2^{k_0}.$$

Entonces se tiene :

$$k_0 - 1 = [\log_2 n].$$

Además,

$$[\sqrt[k]{n}\,] = 1 \quad \text{si } k \geq k_0.$$

Entonces la suma del segundo miembro de la igualdad propuesta, que llamaremos S_2, se puede escribir como

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=2}^{n}[\sqrt[k]{n}\,] = \sum_{k=2}^{k_0-1}[\sqrt[k]{n}\,] + \sum_{k=k_0}^{n}[\sqrt[k]{n}\,] \\ &= \sum_{k=2}^{k_0-1}[\sqrt[k]{n}\,] + (n - k_0 + 1). \end{aligned}$$

Por otra parte, se tiene :

$$[\log_k n] = p \Rightarrow p \leq \log_k n < p + 1 \Rightarrow \frac{1}{p+1} < \log_n k \leq \frac{1}{p}$$

Y esto implica que

$$\sqrt[p+1]{n} < k \leq \sqrt[p]{n} \Rightarrow [\sqrt[p+1]{n}\,] < k \leq [\sqrt[p]{n}\,],$$

luego el número de valores de k tales que $[\log_k n] = p$ es

$$[\sqrt[p]{n}\,] - [\sqrt[p+1]{n}\,].$$

El mayor valor de $[\log_k n]$ es $k_0 - 1 = [\log_2 n]$.

Ahora estamos en condiciones de calcular la suma del primer miembro de la desigualdad propuesta, que es

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{k=2}^{n} [\log_k n] \\
&= (k_0-1)\left(\left[\sqrt[k_0-1]{n}\right]-\left[\sqrt[k_0]{n}\right]\right) \\
&\quad + (k_0-2)\left(\left[\sqrt[k_0-2]{n}\right]-\left[\sqrt[k_0-1]{n}\right]\right) \\
&\quad + \cdots + \\
&\quad + 2\left(\left[\sqrt{n}\right]-\left[\sqrt[3]{n}\right]\right) + \\
&\quad + 1\left(n-\left[\sqrt[3]{n}\right]\right) \\
&= -(k_0-1)\left[\sqrt[k_0]{n}\right] + \sum_{k=2}^{k_0-1}\left[\sqrt[k]{n}\right] + n \\
&= \sum_{k=2}^{k_0-1}\left[\sqrt[k]{n}\right] + n - k_0 + 1 = S_2,
\end{aligned}
$$

como queríamos demostrar.

Solución 2 (*M.Ladra*)

Procederemos por inducción. Para $n = 2,$ la igualdad se cumple.

Para probar el paso de inducción $n \to n+1$ basta observar que los nuevos sumandos $\sqrt[n+1]{n+1}$ y $\log_{n+1}(n+1)$ tienen parte entera 1. Es suficiente estudiar el comportamiento de los viejos sumandos.

¿Cómo cambian después de incrementarse el valor de n en una unidad?

Claramente, si $n+1$ no es una potencia exacta de algún entero con exponente mayor que 1, entonces los dos miembros no cambian en absoluto.

Si $n+1 = a_1^{r_1} = a_2^{r_2} = \cdots = a_k^{r_k},$ entonces cada miembro de la relación se incrementa por k y la igualdad se sigue cumpliendo.

Observación

En relación con este problema, M.Bencze propuso en la revista rumana Gazeta Matematica el siguiente problema:

Sea $p \in \mathbb{N} | p \neq 0, p \neq 1$. Probar que

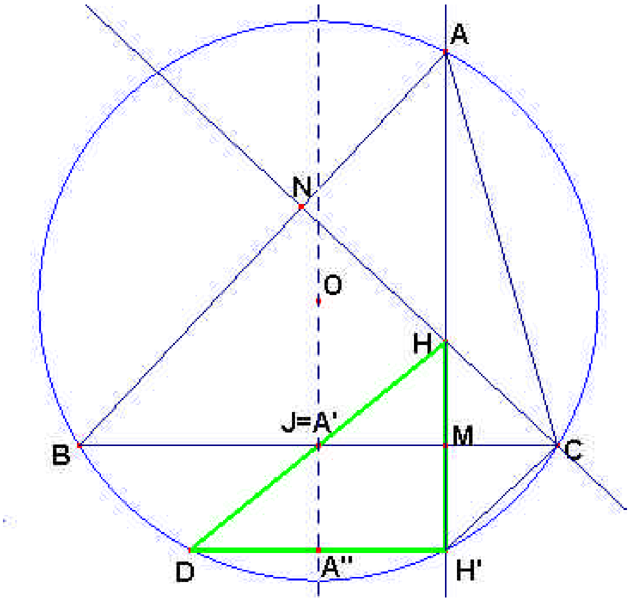
$$\sum_{k=1}^{p^n}\left[\log_p k\right] = \frac{(n-1)p^{n+1} - np^n + (n+1)p - n}{p-1}.$$

Solución

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{p^n}\left[\log_p k\right] &= \left(\left[\log_p p\right] + \cdots + \left[\log_p (p^2-1)\right]\right) + \\
&\quad + \left(\left[\log_p p^2\right] + \cdots + \left[\log_p (p^3-1)\right]\right) + \\
&\quad + \cdots + \left(\left[\log_p p^{n-1}\right] + \cdots + \left[\log_p (p^n-1)\right]\right) + \left[\log_p p^n\right] \\
&= 1 \bullet (p^2-p) + 2(p^3-p^2) + \cdots + (n-1)(p^n-p^{n-1}) + n \\
&= (n-1)p^n - p(1+p+p^2+\cdots+p^{n-2}) + n \\
&= \frac{(n-1)p^{n+1} - np^n + (n+1)p - n}{p-1}.
\end{aligned}
$$

<u>Problema 27</u> .-
(propuesto por el Prof. Laurentiu Modan, Universidad de Bucarest)
En el triángulo ABC, consideremos A’, el punto medio de BC; el ortocentro H y el punto D, diametralmente opuesto a A en la circunferencia circunscrita a ABC.
Si J es el punto medio de HD, demostrar que H, J, A’ y D están alineados.

Dem.-
Si AH corta al lado BC en M, y a la circunferencia en H', entonces HM = MH'.



Esto es debido a la congruencia de los triángulos rectángulos en M, HMC y H'MC ya que tienen el lado común MC, y además son iguales los ángulos HCM y MCH', por ser ambos iguales al ángulo BAH'.
Como el triángulo HH'D es rectángulo en H' ya que AD es un diámetro de la circunferencia de centro O, resultará que el lado MJ es la paralela media del lado DH'. Si trazamos ahora la paralela media por J respecto al lado HH', esta línea al ser perpendicular al lado DH', cuerda de la circunferencia de centro O, pasará por este punto y también por el punto medio de la cuerda BC, por ser ésta también paralela al lado DH'. En definitiva, el punto J y el punto A', punto medio del lado AB, son el mismo.
Así se verifica que, en efecto, los puntos H, J= A' y D son colineales, siendo además J=A', el punto medio entre D y H.

Saludos de F. Damián Aranda Ballesteros.

PROBLEMAS PROPUESTOS (7)

Problema 31 (propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania)
Se considera el conjunto

$$F = \{f \mid f : \{a_1, \cdots, a_m\} \to \{b_1, \cdots, b_m\}\}.$$

Se sabe que, si $m < n$, el número de todas las aplicaciones inyectivas $f \in F$ es 12; y que, si $m = n$, el número de todas las biyecciones $f \in F$ es 24.
Se pide:
a) Calcular $|F|$ cuando $m \neq n$.
b) ¿Cuántas aplicaciones sobreyectivas hay en F si $m \neq n$?

Problema 32 (propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania)
Sea $V_{p,q}$ el número de variaciones sin repetición de p elementos tomados de q en q.
Se supone que m es un número primo impar.
Resolver la ecuación

$$V_{2^m,m} = 2.$$

***Problema 33** (I.Sharygin; comunicado al editor por el Prof. Jean-Louis Ayme, St.Denis, isla de la Reunión, Francia)
Sean Γ_1 y Γ_2 dos circunferencias secantes en P y Q. Sea t una tangente común a las dos circunferencias. Sean R y S los puntos de contacto respectivos de t con Γ_1 y Γ_2.
Sean :
A, un punto de Γ_1;
B, el segundo punto de intersección de AP con Γ_2;
C, el segundo punto de intersección de Γ_1 con la paralela a BS que pasa por R;
D, el segundo punto de intersección de CQ con Γ_2.
Demostrar que RA y SD son paralelas.

Problema 34 (propuesto en la Escuela de Ingenieros Agrónomos, Madrid , 1941)
Dos jugadores, juegan de la siguiente manera: Dado un número N de objetos $(N > 1)$, los dos jugadores tienen la facultad de tomar alternativamente 1, 2 ó 3 objetos. El jugador que toma el último objeto pierde. ¿Cuál de los dos jugadores, y en qué casos, tiene una estartegia ganadora?

***Problema 35** (propuesto por el Editor)
Se aplican a los vértices A,B,C,D de un tetraedro cuatro masas cualesquiera a, b, c, d y se buscan los centros de gravedad de estas masas combinados dos a dos, lo cual da seis puntos sobre las aristas. Demostrar que el volumen del sólido cuyos vértices son estos seis puntos se halla con el volumen del tetraedro ABCD en la relación siguiente:

$$\frac{2abcd(a+b+c+d)^2}{(a+b)(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)(c+d)}.$$

DIVERTIMENTOS MATEMÁTICOS (**7**)

Algunas curiosidades sobre las cifras de los números e y π

Hay algunas reglas mnemotécnicas para recordar las primeras cifras decimales de e (contar las letras de las palabras de la frase siguiente):

Yo estudio y traduzco el holandés (2;71828)

En inglés:

He studied a treatise on calculus

Son más conocidas las estrofas para recordar las primeras cifras decimales de π. Como la cifra número 32 de π es un 0, la mayor parte de los versos o poemas terminan antes de esa cifra.

Los versos que siguen dan 20 cifras:

Soy y seré a todos definible;
mi nombre tengo que daros,
cociente diametral siempre inmedible
soy de los redondos aros.

En inglés :

How I want a drink,
alcoholic of course,
after the heavy lectures
involving quantum mechanics!

En latín:(falta el 3 inicial; dedicado a Bailey) da 31 cifras.

I nunc, O Baili, Parnassum et dessere rupem;
Dic sacra Pieridum deteriora quadris!
Subsidium hoc ad vos, quamquam leve, fertur ab hymnis
Quos dat vox Sophocli (non in utroque probrumst?)

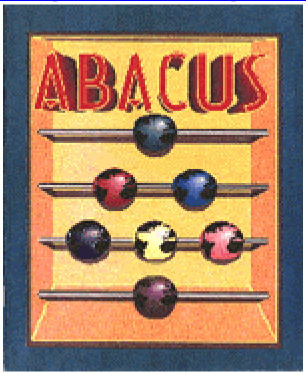
En francés (31 cifras)

Que j’aime à faire apprendre un nombre utile aux sages!
Immortel Archimède, artiste ingénieur,
qui de ton jugement peu priser la valeur?
Pour moi, ton problème eut de pareils avantages.

COMENTARIO DE PÁGINAS WEB

ABACUS International Math Challenge

http://www.gcschool.org/abacus.html



La página web del Concurso Internacional de matemáticas ABACUS está compuesta, casi exclusivamente, por los enunciados de los problemas propuestos en esta competición por Internet, organizada por el Prof. Tivadar Diveki para estudiantes muy jóvenes, de 9 a 14 años. Hay tres niveles:

A) 9-10 años (Grados 3-4)
B) 11-12 años (Grados 5-6)
C) 13-14 años (Grados 7-8)

Mensualmente, desde septiembre hasta mayo, se proponen 8 problemas por cada nivel. Los estudiantes interesados deben enviar sus soluciones a la dirección electrónica que se indica en la propia página.
Están disponibles los problemas desde 1997 hasta 2003. No se incluyen las soluciones, y algunos problemas son realmente difíciles. Pero no es nada sencillo encontrar buenos problemas para los alumnos más jóvenes, así que aquí se pueden buscar ideas para proponer problemas en estos niveles educativos tempranos.
La estructura de la página es muy simple, y forma parte de las páginas web de la Grace Church School de Nueva York.

Francisco Bellot Rosado

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI