UN PROBLEMA DE KVANT

En la revista rusa Kvant se propuso, hace algunos años, el siguiente problema:
Demostrar que

$$\sum_{k=2}^{n}[\log_k n] = \sum_{k=2}^{n}[\sqrt[k]{n}].$$

Solución 1(*Mª A.López Chamorro*)
Sea $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$2^{k_0-1} \leq n < 2^{k_0}.$$

Entonces se tiene :

$$k_0 - 1 = [\log_2 n].$$

Además,

$$[\sqrt[k]{n}] = 1 \quad \text{si } k \geq k_0.$$

Entonces la suma del segundo miembro de la igualdad propuesta, que llamaremos S_2, se puede escribir como

$$S_2 = \sum_{k=2}^{n}[\sqrt[k]{n}] = \sum_{k=2}^{k_0-1}[\sqrt[k]{n}] + \sum_{k=k_0}^{n}[\sqrt[k]{n}]$$
$$= \sum_{k=2}^{k_0-1}[\sqrt[k]{n}] + (n - k_0 + 1).$$

Por otra parte, se tiene :

$$[\log_k n] = p \Rightarrow p \leq \log_k n < p+1 \Rightarrow \frac{1}{p+1} < \log_n k \leq \frac{1}{p}$$

Y esto implica que

$$\sqrt[p+1]{n} < k \leq \sqrt[p]{n} \Rightarrow [\sqrt[p+1]{n}] < k \leq [\sqrt[p]{n}],$$

luego el número de valores de k tales que $[\log_k n] = p$ es

$$[\sqrt[p]{n}] - [\sqrt[p+1]{n}].$$

El mayor valor de $[\log_k n]$ es $k_0 - 1 = [\log_2 n]$.

Ahora estamos en condiciones de calcular la suma del primer miembro de la desigualdad propuesta, que es

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{k=2}^{n} [\log_k n] \\
&= (k_0-1)\left(\left[\sqrt[k_0-1]{n}\right] - \left[\sqrt[k_0]{n}\right]\right) \\
&\quad + (k_0-2)\left(\left[\sqrt[k_0-2]{n}\right] - \left[\sqrt[k_0-1]{n}\right]\right) \\
&\quad + \cdots + \\
&\quad + 2\left(\left[\sqrt{n}\right] - \left[\sqrt[3]{n}\right]\right) + \\
&\quad + 1\left(n - \left[\sqrt[3]{n}\right]\right) \\
&= -(k_0-1)\left[\sqrt[k_0]{n}\right] + \sum_{k=2}^{k_0-1}\left[\sqrt[k]{n}\right] + n \\
&= \sum_{k=2}^{k_0-1}\left[\sqrt[k]{n}\right] + n - k_0 + 1 = S_2,
\end{aligned}
$$

como queríamos demostrar.

Solución 2 (*M.Ladra*)

Procederemos por inducción. Para $n = 2,$ la igualdad se cumple.

Para probar el paso de inducción $n \to n+1$ basta observar que los nuevos sumandos $\sqrt[n+1]{n+1}$ y $\log_{n+1}(n+1)$ tienen parte entera 1. Es suficiente estudiar el comportamiento de los viejos sumandos.

¿Cómo cambian después de incrementarse el valor de n en una unidad?

Claramente, si $n+1$ no es una potencia exacta de algún entero con exponente mayor que 1, entonces los dos miembros no cambian en absoluto.

Si $n+1 = a_1^{r_1} = a_2^{r_2} = \cdots = a_k^{r_k},$ entonces cada miembro de la relación se incrementa por k y la igualdad se sigue cumpliendo.

Observación

En relación con este problema, M.Bencze propuso en la revista rumana Gazeta Matematica el siguiente problema:

Sea $p \in \mathbb{N} / p \neq 0, p \neq 1$. Probar que

$$\sum_{k=1}^{p^n}\left[\log_p k\right] = \frac{(n-1)p^{n+1} - np^n + (n+1)p - n}{p-1}.$$

Solución

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{p^n}\left[\log_p k\right] &= \left(\left[\log_p p\right] + \cdots + \left[\log_p (p^2-1)\right]\right) + \\
&\quad + \left(\left[\log_p p^2\right] + \cdots + \left[\log_p (p^3-1)\right]\right) + \\
&\quad + \cdots + \left(\left[\log_p p^{n-1}\right] + \cdots + \left[\log_p (p^n-1)\right]\right) + \left[\log_p p^n\right] \\
&= 1 \bullet (p^2-p) + 2(p^3-p^2) + \cdots + (n-1)(p^n - p^{n-1}) + n \\
&= (n-1)p^n - p(1 + p + p^2 + \cdots + p^{n-2}) + n \\
&= \frac{(n-1)p^{n+1} - np^n + (n+1)p - n}{p-1}.
\end{aligned}
$$

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI