COMPETICIÓN MATEMÁTICA MEDITERRÁNEA 2003
Memorial Peter O'Halloran
Requena, 3 de mayo de 2003

Nombre y apellidos

1.Probar que la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z + 1$$

no tiene soluciones racionales.

2.Un triángulo ABC es tal que

$$BC = CA + \frac{1}{2}AB.$$

P es el punto del lado AB tal que

$$\frac{BP}{PA} = \frac{1}{3}.$$

Demostrar que $\widehat{CAP} = 2 \bullet \widehat{CPA}$.

3.Sean $a, b, c \geq 0, a + b + c = 3$. Demostrar que

$$\frac{a}{b^2+1} + \frac{b}{c^2+1} + \frac{c}{a^2+1} \geq \frac{3}{2}.$$

¿Cuándo es válido el signo = ?

4.Se considera un sistema formado por infinitas esferas de metal, con centros en todos los puntos $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$. Se dice que este sistema es estable si la temperatura de cada esfera es la media aritmética de las temperaturas de las seis esferas más cercanas. Supongamos que la temperatura de cada esfera está comprendida entre 0 grados y 1 grado centígrado. Demostrar que si el sistema es estable, entonces todas las esferas están a la misma temperatura.

Cada problema vale 7 *puntos*.
Tiempo: 4 *horas*.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita: