

Teorema de Harcourt

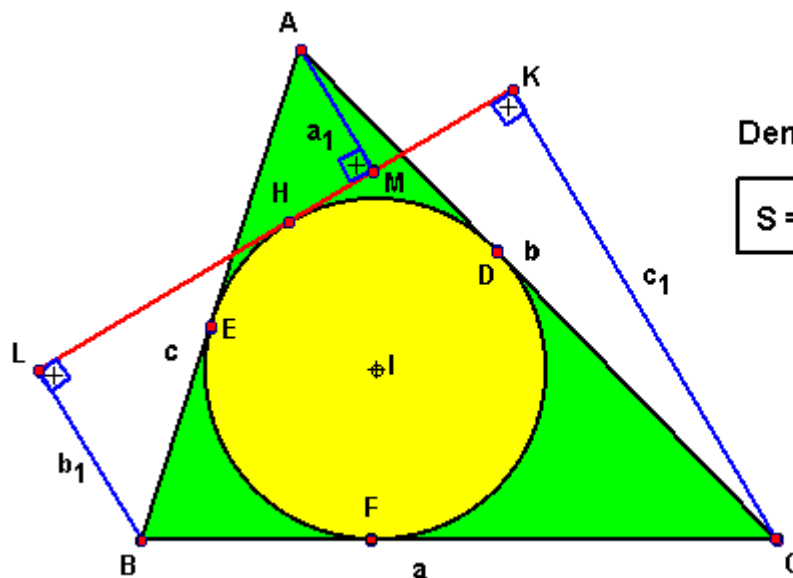
Por Juan Carlos Salazar

1. Introducción:

Este teorema establece una relación interesante para el cálculo del área (S) de un triángulo (ABC), que involucra a los lados del triángulo (a, b, c) y las distancias (a_1, b_1, c_1) desde los vértices (A, B, C) respectivos hacia una tangente cualesquiera sobre el incírculo o excírculo, según sea el caso. La única referencia escrita de este teorema, facilitada por el Prof. Francisco Bellot Rosado [1], que se encontró sin demostración por métodos geométricos, establece la relación para el caso del incírculo, esto motivó al autor para tratar de encontrar un método de demostración apropiado y como resultado del método de demostración desarrollado, se interpretó que también es aplicable para el caso del excírculo [2]. Se incluyen además dos problemas de aplicación de este teorema.

2. Teorema de Harcourt para el Incírculo:

Sea el triángulo ABC con lados a, b y c. Si las distancias desde los vértices A, B y C hacia una tangente al incírculo por el menor arco cercano al vértice A, son a_1, b_1, c_1 respectivamente, luego el área (S) del triángulo ABC es igual a $\frac{(-a \cdot a_1 + b \cdot b_1 + c \cdot c_1)}{2}$. (Ver Fig.1)



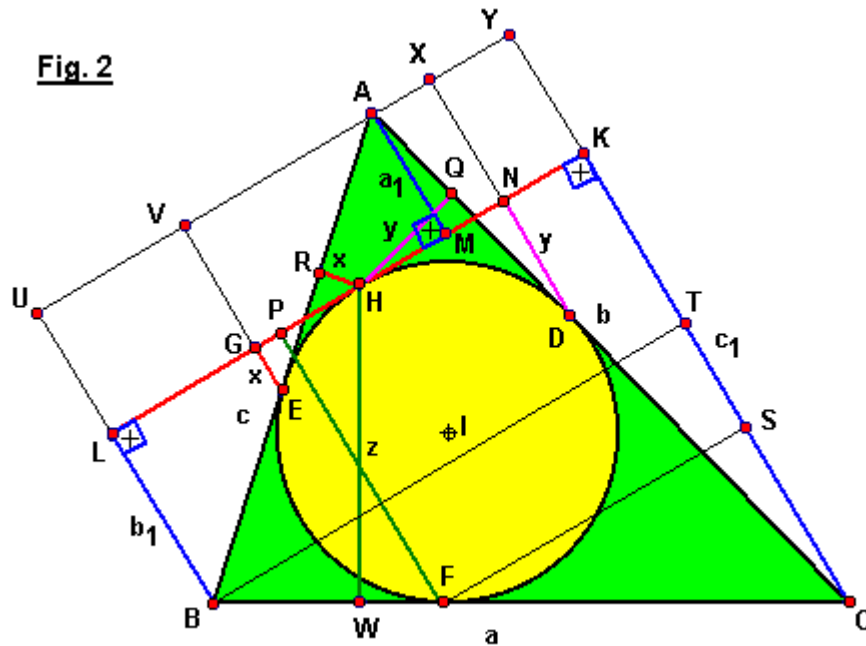
Demostrar que:

$$S = (-a \cdot a_1 + b \cdot b_1 + c \cdot c_1) / 2$$

Fig. 1

Demostración:

Considerando el punto de tangencia H con sus respectivas distancias $HR = x$, $HW = z$ y $HQ = y$ hacia los lados $AB = c$, $BC = a$ y $AC = b$ respectivamente, tenemos además que las distancias desde los otros puntos de tangencia D, E y F hacia la tangente LK cumplen con las siguientes relaciones $EG = x$, $DN = y$ y $FP = z$. (Ver Fig.2)



Trazamos por el vértice A, $UY \parallel LK$ también $BT \parallel LK \parallel FS$, además $UB \parallel VE \parallel PF \parallel AM \parallel XD \parallel YC$. Sabemos que $p = \frac{(a+b+c)}{2}$ (semiperímetro).

Luego tenemos que: $AM = UL = VG = XN = YK = a_1$, también $CT = c_1 - b_1$ y $CS = c_1 - z$.

Entonces:

$\text{Area}_{ABC} = S = \text{Area}_{AHB} + \text{Area}_{AHC} + \text{Area}_{BHC}$

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot HR + \frac{1}{2} \cdot AC \cdot HQ + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot HW$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot c \cdot x + \frac{1}{2} \cdot b \cdot y + \frac{1}{2} \cdot a \cdot z \dots \dots \dots (1)$$

Por semejanza de triángulos:

$$\text{AEV-ABU: } \frac{EV}{BU} = \frac{AE}{AB} \rightarrow \frac{(x+a_1)}{(a_1+b_1)} = \frac{(p-a)}{c}$$

$$\rightarrow x = \frac{(p-a)(a_1+b_1)}{c} - a_1 \dots \dots \dots (2)$$

$$\text{ADX-ACY: } \frac{DX}{CY} = \frac{AD}{AC} \rightarrow \frac{(y+a_1)}{(a_1+c_1)} = \frac{(p-a)}{b}$$

$$\rightarrow y = \frac{(p-a)(a_1+c_1)}{b} - a_1 \dots \dots \dots (3)$$

$$\text{CFS-CBT: } \frac{CS}{CT} = \frac{FC}{BC} \rightarrow \frac{(c_1-z)}{(c_1-b_1)} = \frac{(p-c)}{a}$$

$$\rightarrow z = c_1 - \frac{(p-c)(c_1-a_1)}{a} \dots \dots \dots (4)$$

Reemplazando (2),(3) y (4) en (1):

$$S = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \left[\frac{(p-a)(a_1+b_1)}{c} - a_1 \right] + \frac{1}{2} \cdot b \cdot \left[\frac{(p-a)(a_1+c_1)}{b} - a_1 \right] + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left[c_1 - \frac{(p-c)(c_1-a_1)}{a} \right]$$

Simplificando obtenemos:

$$S = \frac{(-a \cdot a_1 + b \cdot b_1 + c \cdot c_1)}{2} \quad \text{LQQD.}$$

3. Teorema de Harcourt para el Excírculo:

Sea el triángulo ABC con lados a, b y c. Si las distancias desde los vértices A, B y C hacia una tangente al excírculo relativo al vértice A, son a_1, b_1, c_1 respectivamente, luego el área

(S) del triángulo ABC es igual a $\frac{(-a \cdot a_1 + b \cdot b_1 + c \cdot c_1)}{2}$. (Ver Fig.3)

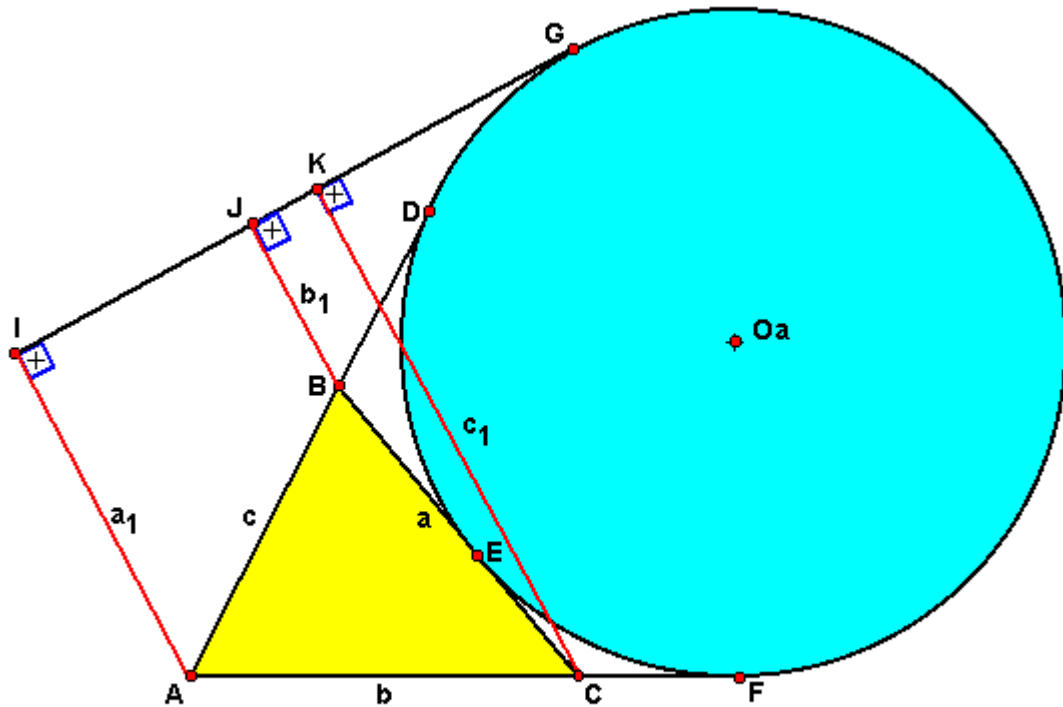


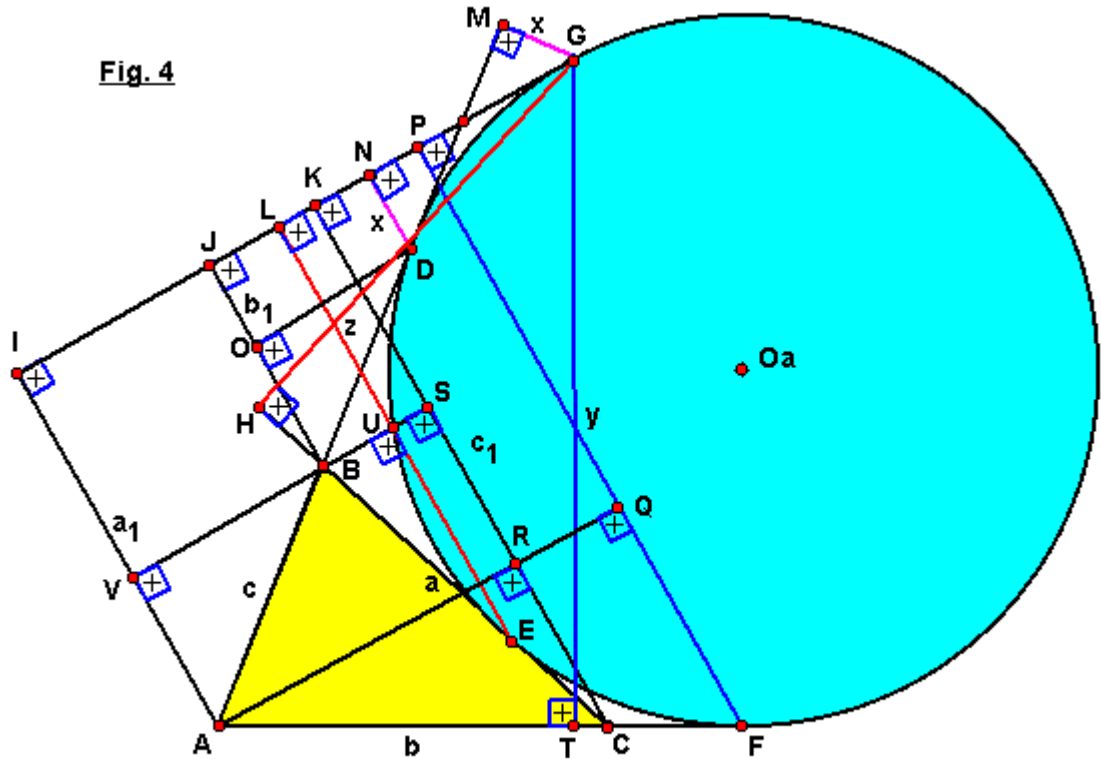
Fig. 3

$$S = (-a \cdot a_1 + b \cdot b_1 + c \cdot c_1) / 2$$

Demostración:

De manera similar al método desarrollado para el caso del incírculo, tomamos como referencia al punto de contacto G de la tangente con el excírculo. Las distancias hacia los lados o prolongaciones del triángulo ABC, son $GM = x$, $GT = y$ y $GH = z$. Para los puntos de tangencia D, E y F, sus distancias a la tangente cumplen las siguientes relaciones: $DN = x$, $FP = y$, y $EL = z$. (Ver Fig. 4). Además trazamos $EL // FP // AI // BJ // CK$, por el vértice B $VS // IG$, también $OD // IG$ y $AQ // IG$.

Fig. 4



También: $OB = b_1 - x$, $AV = a_1 - b_1$, $FQ = y - a_1$, $CR = c_1 - a_1$, $UE = z - b_1$ y $CS = c_1 - b_1$.

Entonces:

$$\text{Area}ABC = S = \text{Area}AGB + \text{Area}AGC - \text{Area}BGC$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot GM + \frac{1}{2} \cdot AC \cdot GT - \frac{1}{2} \cdot BC \cdot GH$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot c \cdot x + \frac{1}{2} \cdot b \cdot y - \frac{1}{2} \cdot a \cdot z \dots \dots \dots (1)$$

Por semejanza de triángulos:

$$\text{BOD-AVB: } \frac{OB}{BD} = \frac{AV}{AB} \rightarrow \frac{(b_1 - x)}{(p - c)} = \frac{(a_1 - b_1)}{c}$$

$$\rightarrow x = b_1 - \frac{(a_1 - b_1)(p - c)}{c} \dots \dots \dots (2)$$

$$\text{AQF-ARC: } \frac{FQ}{AF} = \frac{CR}{AC} \rightarrow \frac{(y - a_1)}{p} = \frac{(c_1 - a_1)}{b}$$

$$\rightarrow y = \frac{p(c_1 - a_1)}{b} + a_1 \dots \dots \dots (3)$$

$$\text{BUE-BSC: } \frac{UE}{BE} = \frac{CS}{BC} \rightarrow \frac{(z - b_1)}{(p - c)} = \frac{(c_1 - b_1)}{a}$$

$$\rightarrow z = \frac{(p - c)(c_1 - b_1)}{a} + b_1 \dots \dots \dots (4)$$

Reemplazando (2), (3) y (4) en (1):

$$S = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \left[b_1 - \frac{(a_1 - b_1)(p - c)}{c} \right] + \frac{1}{2} \cdot b \cdot \left[\frac{p(c_1 - a_1)}{b} + a_1 \right] - \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left[\frac{(p - c)(c_1 - b_1)}{a} + b_1 \right]$$

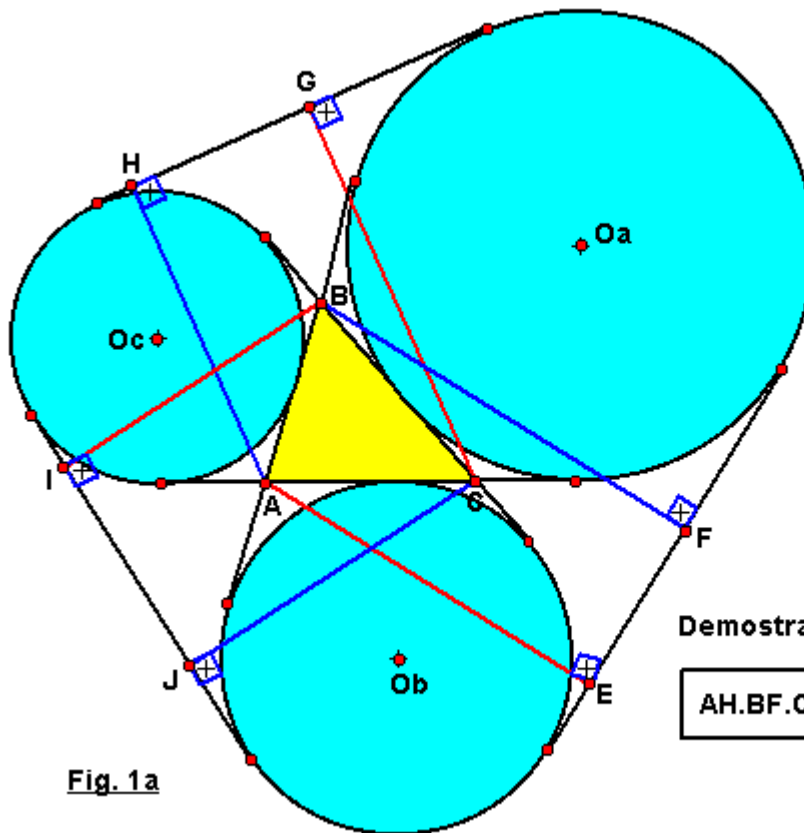
Simplificando obtenemos:

$$S = \frac{(-a \cdot a_1 + b \cdot b_1 + c \cdot c_1)}{2} \quad \text{LQQD.}$$

4. Problemas de Aplicación:

Problema 1:

Sea el triángulo ABC cuyos excírculos son (O_a) , (O_b) y (O_c) . Si trazamos AH y CG perpendiculares a la tangente común de los excírculos (O_a) y (O_c) , de manera similar trazamos BF y AE perpendiculares a la tangente común de (O_a) y (O_b) además BI y CJ perpendiculares a la tangente común de (O_b) y (O_c) . Demostrar que : $AH \cdot BF \cdot CJ = AE \cdot BI \cdot CG$. [2] (Ver Fig.1a).

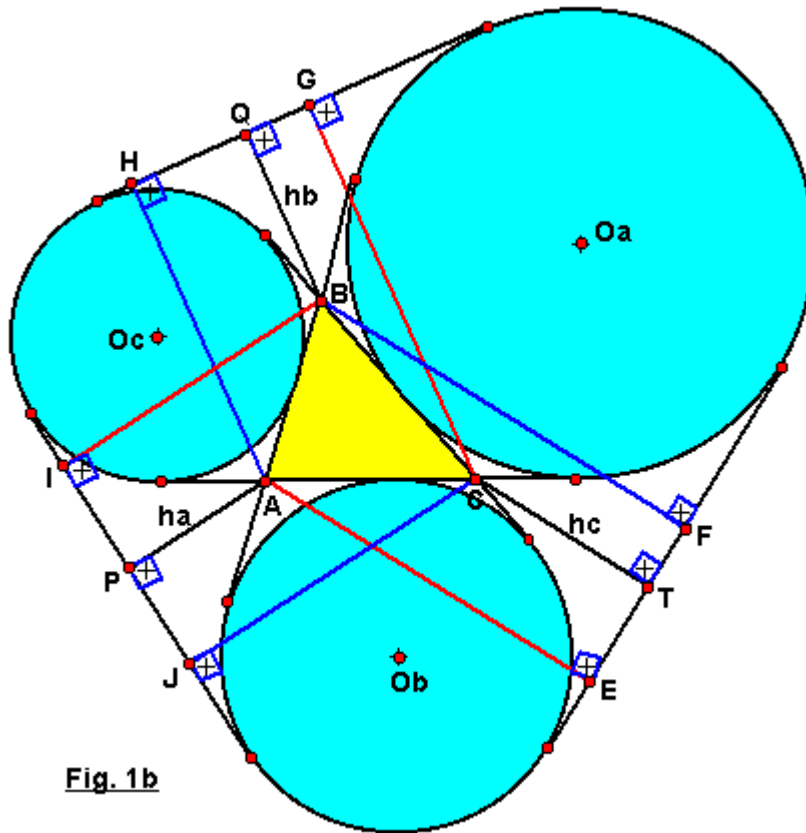


Demostrar que:

$$AH \cdot BF \cdot CJ = AE \cdot BI \cdot CG$$

Demostración:

Aplicaremos el teorema de Harcourt para el caso del excírculo, por tal motivo trazamos las perpendiculares “que faltan” desde los vértices hacia las tangentes AP, BQ y CT. (Ver Fig. 1b). Por lo tanto tenemos que estas perpendiculares son iguales a las alturas del triángulo es decir: $AP = ha$, $BQ = hb$ y $CT = hc$.

**Fig. 1b**

Aplicamos Harcourt con la tangente común a (Oa) y (Oc) :

$$S = \frac{(-BC \cdot AH + AC \cdot BQ + AB \cdot CG)}{2}$$

$$S = \frac{(-a \cdot AH + b \cdot BQ + c \cdot CG)}{2}$$

$$S = \frac{(-a \cdot AH + b \cdot hb + c \cdot CG)}{2}$$

Por lo tanto:

$$a \cdot AH = c \cdot CG \dots \dots \dots (1)$$

De manera similar, tenemos:

Para la tangente común a (Ob) y (Oc) :

$$c \cdot CJ = b \cdot BI \dots \dots \dots (2)$$

Para la tangente común a (Oa) y (Ob) :

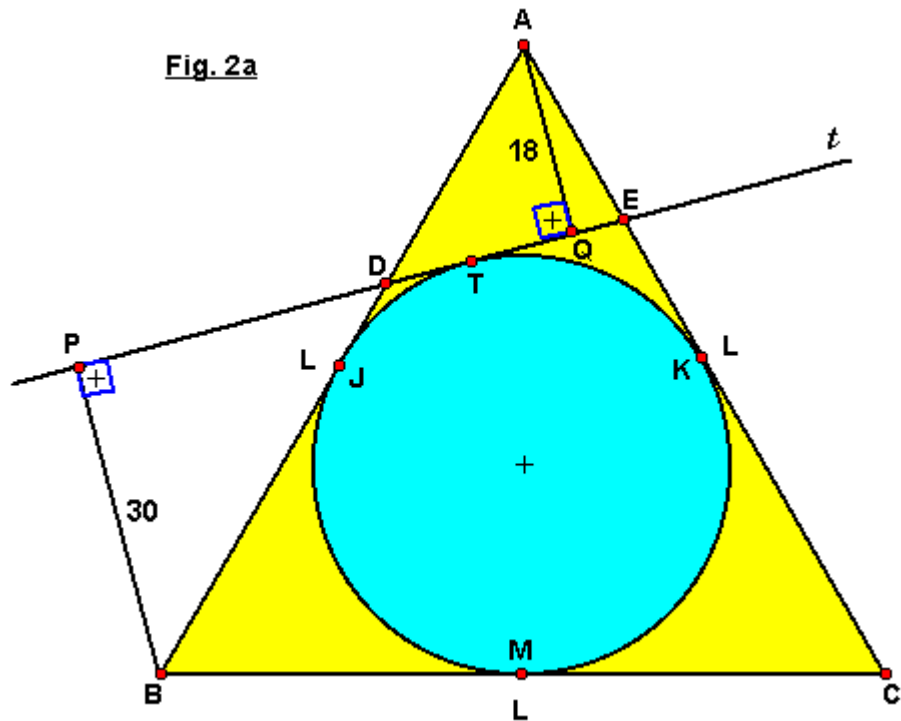
$$b \cdot BF = a \cdot AE \dots \dots \dots (3)$$

Combinando (1), (2) y (3) tenemos:

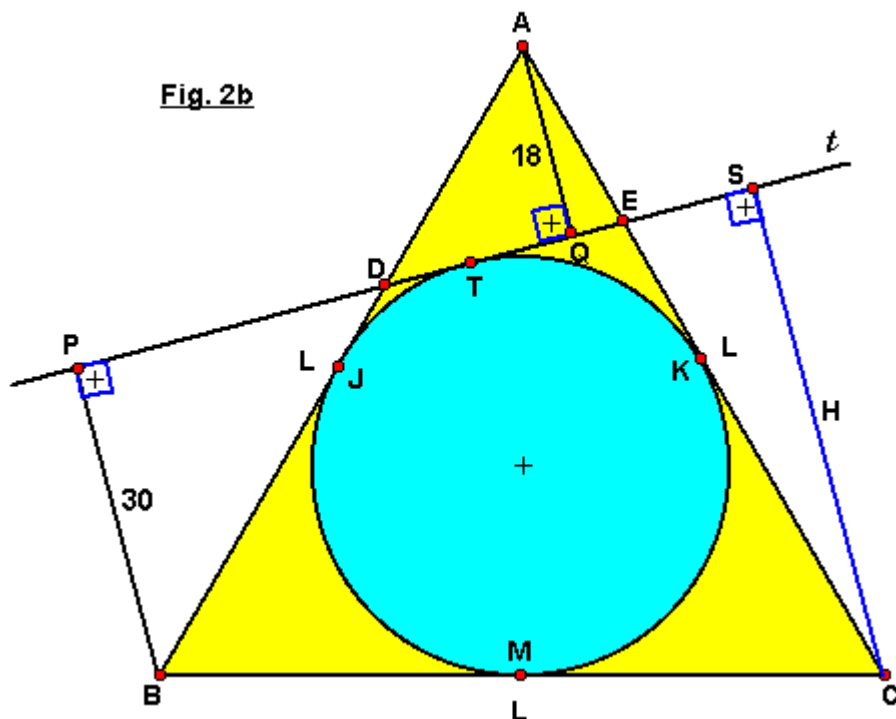
$$AH \cdot BF \cdot CJ = AE \cdot BI \cdot CG \quad \text{LQQD.}$$

Problema 2:

Sea el triángulo equilátero ABC , de lado L . Por un punto del menor arco de su incírculo cercano al vértice A , se traza una tangente al mismo, de tal forma que las distancias desde los vértices A y B son 18 y 30 respectivamente. Calcular L . (Ver Fig. 2a).

**Solución:**

Trazamos la perpendicular $CS = H$, hacia la tangente t . (Ver Fig. 2b)



Aplicamos Harcourt caso del incírculo en el triángulo ABC:

$$\text{AreaABC} = S = \frac{(-BC.AQ + AC.BP + AB.CS)}{2} = \frac{(-L(18) + L(30) + LH)}{2}$$

$$S = \frac{L(12 + H)}{2} \dots\dots\dots(1)$$

También:

$$S = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \dots\dots\dots(2)$$

Por semejanza de triángulos:

$$\text{AQE-ESC: } \frac{AQ}{AE} = \frac{CS}{CE} \rightarrow \frac{18}{AE} = \frac{H}{CE} \rightarrow \frac{(18+H)}{L} = \frac{18}{AE} = \frac{H}{CE}$$

$$\text{Luego: } AE = \frac{18L}{(H+18)} \text{ y } CE = \frac{LH}{(H+18)}$$

$$\text{AQD-BPD: } \frac{AQ}{AD} = \frac{BP}{BD} \rightarrow \frac{18}{AD} = \frac{30}{BD} \rightarrow \frac{48}{L} = \frac{18}{AD} = \frac{30}{BD}$$

$$\text{Luego: } AD = \frac{18L}{48} = \frac{3L}{8} \text{ y } BD = \frac{30L}{48} = \frac{5L}{8}$$

Además para el triángulo ADE:

$$AJ = AK = \frac{L}{2} = \frac{1}{2} \cdot (AD + AE + DE) \text{ de donde: } \frac{L}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3L}{8} + \frac{18L}{(H+18)} + DE \right)$$

$$\text{Luego: } DE = \frac{L(5H - 54)}{8(H+18)}$$

Entonces:

$$\text{AreaADE} = \frac{DE.AQ}{2} = \frac{9L(5H - 54)}{8(18 + H)} \dots\dots\dots(3)$$

Aplicando relación de áreas:

$$\frac{\text{AreaADE}}{\text{AreaABC}} = \frac{AD.AE}{AB.AC}$$

$$\frac{\text{AreaADE}}{\text{AreaABC}} = \frac{\left(\frac{3L}{8}\right)\left(\frac{18L}{H+18}\right)}{L^2}$$

$$\frac{\text{AreaADE}}{\text{AreaABC}} = \frac{54}{8(H+18)} \dots\dots\dots(4)$$

Combinando (1), (3) y (4) obtenemos:

$$\text{AreaADE} = \frac{9L(5H - 54)}{8(H+18)} = \frac{27L(H+12)}{8(H+18)}$$

Luego: $5H - 54 = 36 + 3H$ de donde $H = 45$.

De (1) y (2):

$$S = \frac{L(12 + H)}{2} = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \text{ reemplazando H, finalmente tenemos que } L = 38\sqrt{3}.$$

5. Comentarios:

Si observamos en la Fig. 1a, correspondiente al Problema 1 y denotamos por A' , B' y C' a los puntos de intersección de los pares de perpendiculares BF y CG , AE y CJ , AH y BI respectivamente, podemos demostrar que el hexágono $AC'BA'CB'$ es equilátero con lado igual al circunradio del triángulo ABC y el triángulo $A'B'C'$ es homotético y congruente con el triángulo ABC , teniendo como centro de homotecia al centro del círculo de los nueve puntos del triángulo ABC .

No se descarta que las relaciones obtenidas por medio de la aplicación del teorema de Harcourt se puedan obtener por la aplicación de otras relaciones métricas ya conocidas, sin embargo creemos que el conocimiento de este teorema facilitará establecer las relaciones correspondientes por su aplicación de una forma directa, como conclusión podemos afirmar que tenemos una nueva herramienta para aprovecharla.

Finalmente no podemos dejar de mencionar que este teorema puede ser generalizado en una forma analítica, cuya relación se puede establecer haciendo uso de coordenadas baricéntricas homogéneas.[2]

6. Agradecimientos:

Aprovecho la oportunidad por medio de esta tribuna, de agradecer el inestimable apoyo que he recibido del Profesor Francisco Bellot Rosado, editor de la Revista Escolar de las Olimpiadas Iberoamericanas de Matemáticas. Ha sido muy importante su preocupación y constante comunicación para lograr este cometido: el “rescate” de este teorema olvidado por muchos.

Referencias:

- [1] F.G.-M., Exercices de Géométrie, Pag. 750, Sexta Edición, 1920, Editorial Jacques Gabay, París, Reimpresión 1991.
- [2] Harcourt's Theorem By Nikolaos Dergiades and Juan Carlos Salazar, Forum Geometricorum, FG200313, 117-124.
<http://forumgeom.fau.edu/FG2003volume3>

Nota:

Juan Carlos Salazar colabora con la Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas (IMO Venezuela) que preside el Prof. Rafael Sánchez Lamonedá.
 Email: caisersal@yahoo.com.

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

<http://www.campus-oei.org/oim/revistaoidm/>

Edita:

