Problema 33.-

(I.Sharygin; comunicado al editor por el Prof. Jean-Louis Ayme, St.Denis, isla de la Reunión, Francia)

Sean C 1 y C 2 dos circunferencias secantes en P y Q. Sea t una tangente común a las dos circunferencias. Sean R y S los puntos de contacto respectivos de t con C_1 y C_2.

Sean :

A, un punto de C_1;

B, el segundo punto de intersección de AP con C_2;

C, el segundo punto de intersección de C_1 con la paralela a BS que pasa por R;

D, el segundo punto de intersección de CQ con C_2.

Demostrar que RA y SD son paralelas.

Sol:

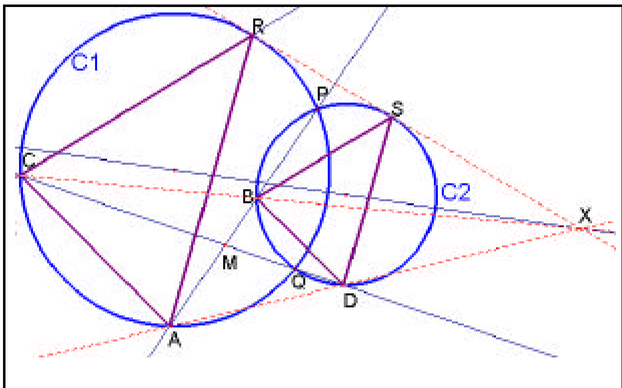

Fig. 1

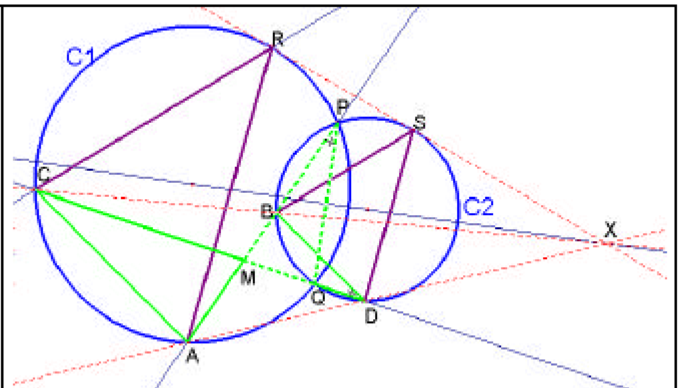

Fig. 2

Sea la **Fig. 1** donde se representa la situación del enunciado.

Para probar que las rectas RA y SD son paralelas, vamos a demostrar que los triángulos CRA y BSD son homotéticos de razón R_1/R_2 (donde R_i es el radio de C_i, i=1,2) y como centro de homotecia el punto X, centro de semejanza directa de las circunferencias C_1 y C_2. Así de esta forma las rectas RA y SD serían paralelas.

Pero para ver este hecho, usamos las siguientes consideraciones:

* Los puntos S y R son homotéticos respecto de X, por ser ellos, los puntos de contacto de la tangente común con las circunferencias C_2 y C_1, respectivamente.

* Los puntos B y C son homotéticos respecto al mismo puntos X, por la propia construcción del punto C, segundo punto de intersección de C_1 con la paralela a BS que pasa por R.

* Nos faltaría probar que los puntos D y A se corresponden según la misma homotecia considerada. Pero esto es así si tenemos en cuenta las semejanzas existentes entre los triángulos ACM y QPM, por un lado y QPM y BDM por otro (Ver Fig. 2).

Luego entonces ACM y BDM son semejantes también y, por ello CA y BD determinan segmentos paralelos entre sí. Como quiera que ya habíamos visto que los puntos B y C eran homotéticos, resulta así que H(D)=A.

En definitiva, hemos probado que los triángulos BSD y CRA son homotéticos, siendo los pares de puntos transformados los siguientes H(S)= R; H(B)= C; H(D)= A.

Luego entonces RA y SD son paralelas, c.q.d.

Saludos de F. Damián Aranda Ballesteros. Córdoba (España)

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita: