Problema 6 OME’03 Islas Canarias

Ensartamos 2n bolas blancas y 2n bolas negras formando una cadena. Demostrar que, se haga en el orden que se haga, siempre es posible cortar un segmento de cadena exactamente con n bolas blancas y n bolas negras.

Intentemos construir una cadena de modo que no se pueda cortar un segmento con n bolas de cada color. Consideremos ahora el conjunto de los segmentos de cadena obtenidos sucesivamente al tomar 2n bolas seguidas de la cadena.

Llamaremos b’ al nº de bolas blancas en el primer segmento de la cadena y b’’ en el último y colocaremos la cadena de tal modo que b’<b’’ (si son iguales, ambos segmentos tienen n bolas de cada color).

Además, b’<n porque si $b' \geq n$, $b'' \geq n$ y sumando miembro a miembro $b''+b' \geq 2n$ lo cual no es posible ya que la igualdad sólo se cumple si $b''=b'$ y b’’+ b’ es la totalidad de bolas blancas, que es exactamente 2n.

Al ir considerando los sucesivos segmentos de 2n bolas consecutivas, tenemos que cada uno de los segmentos comparten con el anterior todas las bolas menos una, que es sustituida por otra que entra a formar parte del nuevo segmento. Si la bola entrante y la saliente son del mismo color, el valor de b (considerado como un número que varía según al segmento que se refiera), no cambia. Sí lo hace sin embargo cuando son de diferente color; si la que entra es negra y blanca la que sale, b disminuye una unidad y si es una blanca la que entra y una bola negra la que se elimina, b aumenta una unidad.

Entonces, a medida que b va variando, lo hace aumentando o disminuyendo una unidad y como b en el primer segmento debe valer b’ y en el último b’’, todos los números comprendidos entre b’ y b’’ son alguna vez valores de b.

$$b' < n \text{ y } b'+b'' = 2n$$

Si sustituimos en la segunda ecuación b’ por n, cambiando el signo de igualdad de la ecuación se obtiene: $b'+n > 2n \Rightarrow b' > n$ descubriendo así que n está comprendido entre b’ y b’’, es necesariamente valor de b en al menos un segmento. En ese segmento, el número de bolas blancas es n, y el de bolas negras también.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita: