V Olimpíada Matemática Centroamericana y del Caribe.

Costa Rica, 26 de Agosto de 2003.
Primer día

Problema 1. Dos jugadores A y B, juegan por turnos el siguiente juego: Se tiene un montón de 2003 piedras. En su primer turno, A escoge un divisor de 2003, y retira ese número de piedras del montón inicial. Posteriormente, B escoge un divisor del número de piedras restantes, y retira ese número de piedras del nuevo montón, y siguen así sucesivamente. Pierde el jugador que retire la última piedra. Demostrar que uno de los dos jugadores tiene una *estrategia ganadora* y describir dicha estrategia.

Nota: Se entiende por *estrategia ganadora* un método de juego que le garantiza la victoria al que lo aplica sin importar lo que haga su oponente.

Problema 2. Sea S una circunferencia y AB un diámetro de ella. Sea t la recta tangente a S en B y considere dos puntos C, D en t tales que B esté entre C y D. Sean E y F las intersecciones de S con AC y AD y sean G y H las intersecciones de S con CF y DE. Demostrar que $AH = AG$.

Problema 3. Sean a, b enteros positivos, con $a > 1$ y $b > 2$. Demostrar que $a^b + 1 \geq b(a + 1)$ y determinar cuándo se tiene la igualdad.

Tiempo: 4 horas 30 minutos.
Cada Problema vale 7 puntos.

V Olimpíada Matemática Centroamericana y del Caribe.

Costa Rica, 27 de Agosto de 2003.
Segundo día

Problema 4. Sean S_1 y S_2 dos circunferencias que se intersectan en dos puntos distintos P y Q. Sean ℓ_1 y ℓ_2 dos rectas paralelas, tales que:

i. ℓ_1 pasa por el punto P e intersecta a S_1 en un punto A_1 distinto de P y a S_2 en un punto A_2 distinto de P.

ii. ℓ_2 pasa por el punto Q e intersecta a S_1 en un punto B_1 distinto de Q y a S_2 en un punto B_2 distinto de Q.

Demostrar que los triángulos A_1QA_2 y B_1PB_2 tienen igual perímetro.

Problema 5. Un tablero cuadrado de 8cm de lado se divide en 64 casillas cuadradas de 1cm de lado cada una. Cada casilla se puede pintar de blanco o de negro. Encontrar el número total de maneras de colorear el tablero de modo tal que cada cuadrado de 2cm de lado formado por cuatro casillas con un vértice común, contenga dos casillas blancas y dos negras.

Problema 6. Digamos que un entero positivo es *tico* si la suma de sus dígitos (en base 10) es múltiplo de 2003.

i. Demostrar que existe un entero positivo N tal que sus primeros 2003 múltiplos, $N, 2N, 3N, \cdots, 2003N$, son todos *ticos*.

ii. ¿Existe algún entero positivo N tal que todos sus múltiplos sean *ticos*?

Tiempo: 4 horas 30 minutos.
Cada Problema vale 7 puntos.

V Olimpíada Matemática Centroamericana y del Caribe.

Costa Rica, 25 al 30 de Agosto de 2003.
Soluciones Prueba 1 y Prueba 2

Problema 1.

Solución oficial: Mostraremos que el jugador B tiene estrategia ganadora. Nótese que en cada jugada se retira al menos 1 piedra, por lo que siempre debe existir un perdedor.

Al inicio, A en su turno recibe un montón impar de piedras (2003). Como todos los divisores de un impar son impares, A dejará a B un número par de piedras (impar-impar = par) .

- Si le deja 0 piedras, que es par, B gana.

- Si le deja un número par de piedras mayor a 0, B retira cualquier divisor impar del número de piedras restantes (por ejemplo 1) y de este modo le deja de nuevo a A un montón impar de piedras. Si B repite sucesivamente este método nunca perderá ya que siempre deja al menos 1 piedra. Entonces A será el perdedor y B se asegura la victoria.

Problema 2.

Solución oficial: Como $\angle AGB = \angle AHB = 90°$ y los triángulos AGB y AHB tienen el lado común AB, serán suficiente con demostrar que $\angle ABH = \angle ABG$ pues entonces los triángulos AGB y AHB son congruentes y por tanto $AG = AH$.

Como $AEBH$ y $AGBF$ son cuadriláteros cíclicos, entonces $\angle AEH = \angle ABH$ y $\angle GBA = \angle GFA$.

Ahora, como $\angle AEH + \angle CED = 180° = \angle GFA + \angle CFD$, si $\angle CED = \angle CFD$, entonces $\angle AEH = \angle GFA$.

Para demostrar que $\angle CED = \angle CFD$ basta demostrar que $CEFD$ es cíclico. Esto se sigue de ver que el triángulo ABE es semejante al triángulo ABC y que el triángulo AFB es semejante al triángulo ABD.

Entonces de la primera semejanza, $AB^2 = AE \cdot AC$ y de la segunda semejanza, $AB^2 = AD \cdot AF$. En consecuencia, $AE \cdot AC = AD \cdot AF$ y $CEFD$ es cíclico.

Otra manera de probar que $CEFD$ es cíclico es observando que los triángulos AEB y ABC son semejantes ya que son rectángulos y comparten el ángulo $\angle EAB = \angle CAB$. Por lo tanto $\angle ABE = \angle BCA$.

Además $\angle ABE = \angle AFE$ ya que $ABEF$ es cíclico y ambos ángulos subtienden el mismo arco. Luego

$$\angle EFD = 180^\circ - \angle AFE = 180^\circ - \angle ABE = 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - \angle ECD.$$

Por lo tanto, $\angle EFD + \angle ECD = 180^\circ$ y $CEFD$ es cíclico.

Problema 3.

Solución oficial: Se procederá por inducción sobre b.

Para $b = 3$, se tiene que $a^3+1 = (a+1)(a^2-a+1)$. Para mostrar que esta expresión es mayor que $3(a+1)$ es suficiente demostrar que $(a^2 - a + 1) \geq 3$, lo cual es cierto pues $a^2 - a + 1 > a(a-1) \geq 2$.

Ahora supóngase que la expresión es cierta para algún valor de b, es decir, se cumple que $a^b + 1 \geq b(a+1)$. Se demostrará ahora para $b + 1$.

Nótese que

$$a^{b+1} + 1 = a(a^b + 1) - (a+1) + 2 \geq ab(a+1) - (a+1) + 2,$$

donde la última desigualdad se tiene por la hipótesis de inducción. La última expresión se puede reescribir como

$$ab(a+1) - (a+1) + 2 = (a+1)(ab-1) + 2 > (ab-1)(a+1).$$

Finalmente, $ab - 1 \geq 2b - 1 = (b+1) + (b-2) > b + 1$, lo cual es cierto.

Por tanto, la desigualdad se vuelve estricta después de $b = 3$. Retomando el caso $b = 3$, se observa que $a(a-1) = 2$ únicamente cuando $a = 2$. Por tanto, se ha demostrado por inducción que la desigualdad siempre se tiene, y que la igualdad se da únicamente en el caso $a = 2$, $b = 3$. Esto concluye la solución.

Solución alternativa 1: $a \geq 2$, $b \geq 3$, dividimos en dos casos:

1. b impar.

$$a^b + 1 = (a+1)(a^{b-1} - a^{b-2} + a^{b-3} - a^{b-4} + \cdots + a^2 - a + 1)$$

como $a+1>0$, basta demostrar que

$$(a^{b-1}-a^{b-2})+(a^{b-3}-a^{b-4})+\cdots+(a^2-a)+1\geq b \quad (*).$$

Del lado izquierdo tenemos $\frac{b-1}{2}$ sumandos entre paréntesis, cada uno de ellos mayor o igual a $a^2-a=a(a-1)\geq 2\cdot 1=2$. Por tanto el lado izquierdo es mayor o igual a $\frac{b-1}{2}$ veces 2 mas 1, es decir, mayor o igual a b. Con ello se prueba la desigualdad requerida $(*)$.

Obsérvese que si $a>2$ entonces $a^2-a>2$ y la desigualdad es estricta.

Además, todos los sumandos entre paréntesis en $(*)$ son de la forma $a^n(a^2-a)$ con $n\geq 0$ par.

Luego, si $n\geq 2$, $a^n(a^2-a)\geq a^2(a^2-1)\geq 4\cdot 2=8>2$. Entonces, si $b>3$ en $(*)$ hay más de un sumando entre paréntesis y por tanto alguno mayor a 2. Así, la desisgualdad es estricta para $b>3$.

2. b par. Utilizaremos el caso anterior.

$$\begin{aligned} a^b+1 &= a^{b-1}+1+a^{b-1}(a-1)\geq (b-1)(a+1)+a^{b-1}(a-1)\\ &\geq (b-1)(a+1)+a^{b-1}=b(a+1)+a^{b-1}-a-1. \end{aligned}$$

Para concluir, nótese que como $b-1\geq 3$, $a^{b-1}-a-1>0$. Así que

$$a^b+1\geq b(a+1)+a^{b-1}-a-1>b(a+1).$$

La igualdad ocurre sólo si $a=2$ y $b=3$.

Solución alternativa 2: Se procederá por inducción sobre a.
Para $a=2$ se tiene que mostrar que

$$2^b+1\geq 3b.$$

Esta desigualdad se probará, a su vez por inducción sobre b.

Para $b=3$, $2^3+1=3\cdot 3$ y se cumple la igualdad para $a=2, b=3$. Supóngase que $2^b+1\geq 3b$ para un valor de $b\geq 3$. Como se cumple que $2^b>3$, sumando ambas desigualdades se tiene que $2^{b+1}+1\geq 3(b+1)$ con lo cual además vemos que si $a=2$ sólo hay igualdad para $b=3$.

Ahora concluiremos la inducción. Supongamos que

$$a^b+1\geq b(a+1),$$

para algún valor de $a \geq 2$ y $b \geq 3$. Luego

$$(a+1)^b + 1 = a^b + \binom{b}{1} a^{b-1} + \cdots + 1^b + 1 \geq b(a+2).$$

Esto completa la inducción y además muestra que si $a > 2$, no se cumple la igualdad. Por tanto, la desigualdad siempre se tiene, con igualdad solamente si $a = 2$ y $b = 3$.

Solución alternativa 3:
Notemos que $2^n \geq n + 1$ para $n \geq 0$. Entonces, si $a = 2$ tenemos

$$a^b = 2^b = 4 \cdot 2^{b-2} \geq 4(b-1),$$

y claramente $4(b-1) > 3b - 1$ pra $b > 3$. Para $b = 3$ se da la igualdad.
Ahora, si $a > 2$ tenemos

$$\begin{aligned} a^b &= (1 + (a-1))^b \geq (a-1)^b + b(a-1) + 1 \geq 2^b + b(a-1) + 1 \\ &= 2 \cdot 2^{b-1} + b(a-1) + 1 > 2(b-1) + b(a-1) + 1 = b(a+1) - 1. \end{aligned}$$

Solución alternativa 4: Consideramos las sucesdion es de números entre 1 y a de longitud b. En total, hay a^b sucesiones de éstas. Veremos que si $a \geq 3$ ó $a = 2$ y $b \geq 4$ hay al menos $(a+1)b$ sucesiones distintas.
Caso $a \geq 3$:

$$\underbrace{11\ldots 1k1\cdots 1}_{b} \,\text{con}\, k > 1 \rightarrow (a-1)b \,\text{sucesiones}$$

$$\underbrace{11\ldots 122\cdots 1}_{b} \rightarrow b \,\text{sucesiones}$$

$$\underbrace{11\ldots 133\cdots 1}_{b} \rightarrow b \,\text{sucesiones}$$

en estos últimos casos consideramos también $21\cdots 12$ y $31\cdots 13$
Luego, $(a-1)b + b + b = (a+1)b$
Caso $a = 2, b > 3$:

$$\underbrace{11\ldots 121\cdots 1}_{b} \rightarrow b \,\text{sucesiones}$$

$$\underbrace{11\dots1221\cdots1}_{b} \to b\,\text{sucesiones}$$

$$\underbrace{11\dots12221\cdots1}_{b} \to b\,\text{sucesiones}$$

en estos últimos casos consideramos también $21\cdots12$ y $2211\cdots12$ y $21\cdots122$. Nótese que las sucesiones el último caso son distintas pues $b > 3$.

Luego si $a > 2 ó b > 3$

$$a^b \geq b(a+1) > b(a+1) - 1.$$

Si $a = 2 y b = 3$ se da la igualdad.

Problema 4.

Solución oficial: Se demostrará que los triángulos A_1QA_2 y B_1PB_2 son congruentes, de donde el resultado se sigue de forma inmediata.

Nótese inicialmente que como $A_1P \parallel B_1Q$, entonces A_1PQB_1 es un trapecio isósceles y sus diagonales son iguales, de donde $A_1Q = B_1P$. Ahora bien, como $\angle PA_1Q = \angle PB_1Q$ por estar inscritos en el mismo arco, y $\angle PA_2Q = PB_2Q$ por la misma razón, entonces $\triangle A_1QA_2$ y $\triangle B_1PB_2$ son semejantes. Como ya se demostró la igualdad entre un par de lados adyacentes, la congruencia de los triángulos se sigue, y el resultado es ahora inmediato.

Solución alternativa 1:

$\angle PA_1Q = \angle PB_1Q$, por estar inscritos en el mismo arco en S_1.

$\angle PA_2Q = \angle PB_2Q$, por estar inscritos en el mismo arco en S_2.

A_2B_2QP es cíclico, por lo que:

$$\angle A_2B_2Q = \angle A_1PQ(1)$$

A_1PQB_1 es cíclico, por lo que:

$$\angle A_1PQ = 180^\circ - \angle QB_1A_1(2)$$

De (1) y (2) se sigue que $\angle A_2B_2Q + QB_1A_1 = 180^\circ$, por lo que $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

Así, $A_1A_2B_2B_1$ es un paralelogramo y sus lados opuestos son iguales y ello implica que $A_1A_2 = B_1B_2$.

Finalmente, por el criterio de congruencia ángulo-lado-ángulo, los triángulos A_1QA_2 y B_1PB_2 son congruentes, y el resultado se sigue.

Nota: De hecho, se puede demostrar que los triángulos A_1QA_2 y B_1PB_2 son congruentes si y sólo si $A_1A_2 \parallel B_1B_2$ o $A_1B_1 \parallel PQ \parallel A_2B_2$. Se ha utilizado la formulación propuesta para no mostrar tan claramente, desde el enunciado, lo que se debe hacer.

Solución alternativa 2:
$\angle PA_1Q = \angle PB_1Q$,y $\angle PA_2Q = \angle PB_2Q$ por estar inscritos en un mismo arco. Luego A_1A_2Q y B_1B_2P son triágulos semejantes. La altura correspondiente aQ y a P en dichos triágulos es la distancia entre las rectas paralelas ℓ_1 y ℓ_2. Por tanto, por tener una altura correspondiente igual y ser semejantes, A_1A_2Q y B_1B_2P son congruentes y el resultado se sigue.

Problema 5.
Solución oficial: Coloreemos la primera fila de casillas de cualquier manera y tratemos de extender la coloración a todo el tablero. Si dos casillas consecutivas de la primera fila tienen el mismo color, las dos que están debajo de ellas en la segunda fila deben recibir el color opuesto, y es fácil ver que hay una única manera admisible de colorear las casillas restantes de la segunda fila, a saber, con el color opuesto al de la casilla correspondiente en la primera fila. Este razonamiento se repite para la tercera, la cuarta... hasta la última fila. En cambio si en la primera fila no hay casillas consecutivas del mismo color, es decir si se colorea BNBNBNBN o NBNBNBNB, entonces la segunda fila admite cualquiera de esas dos coloraciones alternadas, y lo mismo la tercera y las filas restantes. En resumen, cada una de las dos coloraciones alternadas de la primera fila se puede extender de 2^7 maneras, mientras que cada una de las 2^8-2 coloraciones no alternadas se extiende de manera única. En total se obtienen entonces $2 \cdot 2^7 + 2^8 - 2 = 2^9 - 2 = 510$ coloraciones.

Solución alternativa:
Cada fila del tablero admite dos çoloraciones alternadas", a saber BNBNBNBN y NBNBNBNB. Si cada fila se colorea de alguna de estas dos maneras se obtiene $2^8 = 256$ coloraciones válidas.

Hay sólo 2 coloraciones que pueden obtenerse de ambas maneras, es decir que tienen cada fila y cada columna alternada: son las coloraciones del tablero de ajedrez (con la casilla inferior dereche blanca) y su opuesta. Por lo tanto hay $2^8 + 2^8 - 2 = 256 + 256 - 2 = 510$ coloraciones válidas que tienen todas las filas alternadas ó todas las columnas alternadas.

Ahora veamos veamos que no hay más coloraciones válidas que éstas 510. Si hubiese otra, tendría alguna fila i con dos casillas contiguas $(i,j),(i,j+1)$ del mismo color. Es fácil ver que para cualquier fila i' las casillas $(i,j),(i,j+1)$ son del mismo color. Análogamente, existe una columna h con dos casillas contiguas $(k,h),(k+1,h)$ del mismo color, y para cualquier h' se debe cumplir que $(k,h'),(k+1,h')$ son del mismo color. Pero entonces las cuatro casillas $(k,h),(k+1,h),(k,h'),(k+1,h')$serían del mismo color y por tanto la coloración del tablero no sería válida.

Problema 6.
Solución oficial:

1. i. Se construye N con 2003 unos (1's) separados por grupos de tres (3) ceros. Así:

$$N = 1000100010001\cdots100010001.$$

Si $s(n)$ denota la suma de los dígitos de n, entonces $s(N)=2003$. Si k es un entero entre 1 y 2003, $N\cdot k$ es igual a 2003 k's separados por grupo de 3,2,1 ó 0 ceros, de acuerdo a si k tiene 1,2,3 ó 4 cifras. En cualquier caso, $s(N\cdot k)=2003k$ y $N\cdot k$ es *tico*.

ii. Supongamos que existe un tal número N. Escribimos $N=2^\alpha 5^\beta N_1$ donde N_1 es coprimo con 10. Sea $\gamma := \max\{\alpha,\beta\}$. Para cada entero positivo m, tenemos que $m\cdot 2^{\gamma-\alpha}\cdot 5^{\gamma-\beta} = m\cdot N_1\cdot 10^\gamma$ y $s(mN_1 10^\gamma)=s(mN_1)$. Por lo tanto, podemos suponer que N es coprimo con 10 (si no, cambiamos N por N_1).

Como N_1 es coprimo con 10, es bien conocido que existe un múltiplo suyo A de la forma

$$A := \underbrace{11\ldots1}_{\ell\ \text{veces}}$$

(de hecho, tomando $M=9N$ y poniendo $\ell := \phi(M)$ por el Teorema de Euler tenemos que $10^{\phi(M)}-1\equiv 0 \pmod{9N}$, y por lo tanto,

$$\underbrace{11\ldots1}_{\phi(M)\ \text{veces}} = \frac{10^{\phi(M)}-1}{9}$$

se divide por N).

Entonces A es un múltiplo de N y $s(A) = \ell$. Por lo tanto ℓ es un múltiplo de 2003. De acá se puede concluir de dos maneras:

1. Entonces $6A$ y $4 \cdot 10^{\ell-1}A$ son múltiplos de N y la suma de ellos también, y es

$$\underbrace{44\ldots4}_{\ell-2 \text{ veces}}50\underbrace{66\ldots6}_{\ell-1 \text{ veces}}$$

cuya suma de digitos es $4(\ell-2)+5+6(\ell-1) = 10\ell-9$. Como ℓ se divide por 2003, $10\ell-9$ no se puede dividir por 2003, y hemos obtenido la contradicción deseada.

2. Tenemos

$$A := \underbrace{11\ldots1}_{\ell \text{ veces}}$$

entonces $A \cdot 19$ es

$$\underbrace{99\ldots9}_{\ell \text{ veces}} + \underbrace{11\ldots1}_{\ell \text{ veces}}0 = 2\underbrace{11\ldots1}_{\ell-2 \text{ veces}}09$$

y por tantro $s(A \cdot 19) = \ell + 9$. Pero ℓ y $\ell + 9$ no pueden ser simultáneamente múltiplos de 2003.

Solución alternativa para ii.:

ii. La respuesta es no. Se procederá por reducción al absurdo. Supongamos que existe $N = a_1a_2\cdots a_n$ con la propiedad que $k \cdot A$ es *tico* para todo k entero positivo. Se puede suponer sin pérdida de generalidad que $a_n \neq 0$, ya que si $N = 10^t \cdot x$, entonces x también tiene la propiedad porque $s(k \cdot 10^t \cdot x) = s(k \cdot x)$. Entonces, calcularemos $s((10^n-1)N)$ y $s((10^{n+1}-1)N)$:

- Si N, en base 10, es $a_1a_2\cdots a_n$, entonces $(10^n-1)N$, en base 10, es

$$a_1a_2\cdots a_{n-1}(a_n-1)(9-a_1)(9-a_2)\cdots(9-a_{n-1})(10-a_n)$$

y así $s((10^n-1)N) = 9n$.

- $(10^{n+1}-1)N$, en base 10, es

$$a_1a_2\cdots a_{n-1}(a_n-1)9(9-a_1)(9-a_2)\cdots(9-a_{n-1})(10-a_n)$$

y así $s((10^{n+1}-1)N)=9n+9$.

Pero como $9n$ y $9n+9$ no pueden ser ambos múltiplos de 2003, N no cumple la propiedad deseada.

2. Un argumento alternativo al dado en la parte final de ii. es el siguente:

   Se probó que $s((10^n-1)N)=9n$. Entonces, como (2003,3)=1, n es múltiplo de 2003. Pero se observa que $11N$ tiene $n+1$ ó $n+2$ cifras, y su última cifra es $a_n \neq 0$. Así, por por el razonamiento anterior $n+1$ ó $n+2$ debe ser también múltiplo de 2003, lo cual es una contradicción.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI