Problema 40

Una circunferencia de radio ρ es tangente a los lados AB y AC del triángulo ABC, y su centro está a una distancia p del lado BC.

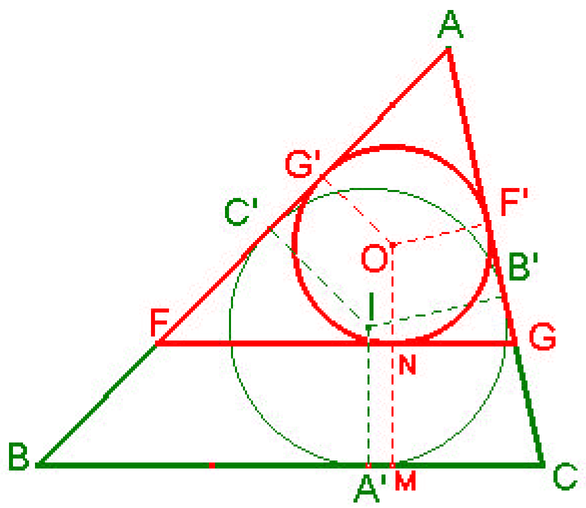
i) Probar que: $a.(p-\rho)=2s.(r-\rho)$,

donde *r* es el radio de la circunferencia inscrita y 2*s* es el perímetro del triángulo.

ii) Demostrar también que si la circunferencia de radio corta a BC en los puntos D y E, entonces $DE=\dfrac{4\sqrt{r.r_a.(\rho-r).(r_a-\rho)}}{r_a-r}$, donde r_a es el radio de la circunferencia exinscrita correspondiente a A.

Sol:

i) Para una mayor comprensión del enunciado, sea considerada la siguiente ilustración:



Sea el triángulo ABC y su circunferencia inscrita de centro I y radio r.
Sea también la circunferencia tangente a los lados AB y AC en los puntos G' y F', respectivamente.
Su centro es el punto O y el radio ρ, siendo la distancia de O hasta el lado BC igual a p.

La semejanza existente entre los triángulos ABC y AFG permite establecer la siguiente relación:

$$\frac{AC'}{AG'}=\frac{s-a}{AG'}=\frac{r}{\rho}$$ de donde

AG'= (s–a).ρ / r.

También tendremos que: FG= a.ρ / r.

Por tanto, el semiperímetro del triángulo AFG es igual a AG' + FG. Así su área S' es igual a:

$$S'= [(s-a).\rho / r + a.\rho / r].\ \rho$$

Por otro lado, el trapecio BFGC cuyas bases son FG y BC tiene como área T el valor:

$$T= 1/2.[\ a.\rho/r\ +\ a].\ (p-\rho)$$

Por fin, el área S del triángulo ABC es igual a S= s.r

Veamos que de la relación entre áreas S' + T = S, obtenemos la identidad deseada.

$[(s-a).\rho / r + a.\rho / r].\ \rho\ +\ 1/2.[\ a.\rho/r\ +\ a].\ (p-\rho)\ =\ s.r$;

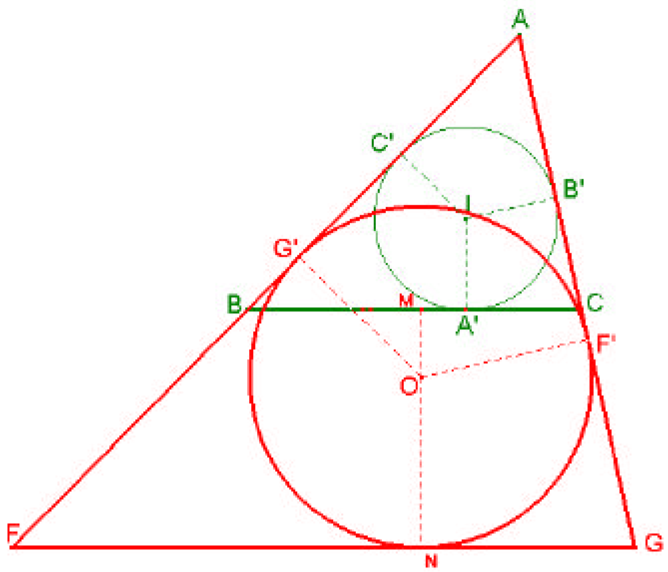
$[(s-a).\rho^2 + a.\rho^2\ ] +\ 1/2.[\ a.\rho +\ a.r].\ (p-\rho)\ =\ s.r^2$;

$1/2.a.(\rho + r).\ (p-\rho)\ =\ s.r^2 - s.\rho^2$;

$a.(\rho + r).\ (p-\rho)\ =\ 2.s.(r-\rho).(r+\rho)$; $\boxed{a.(p-\rho)\ =\ 2.s.(r-\rho)}$

Nota: Para otra configuración diferente del triángulo tangente a los lados AB y AC del triángulo dado, el procedimiento es similar a efectos de cómputo, pero la relación antes demostrada ya no seguiría siendo válida. Busquemos la relación existente en otra situación.

Relación que sería deducida de los siguientes datos:



$S' = [(s-a).\rho / r + a.\rho / r].\ \rho$

$T = 1/2.[\ a.\rho/r\ +\ a].\ (p + \rho)$

$S = s.\ r$

Entonces: $S + T = S'$ y la relación que ahora sí sería válida sería la siguiente:

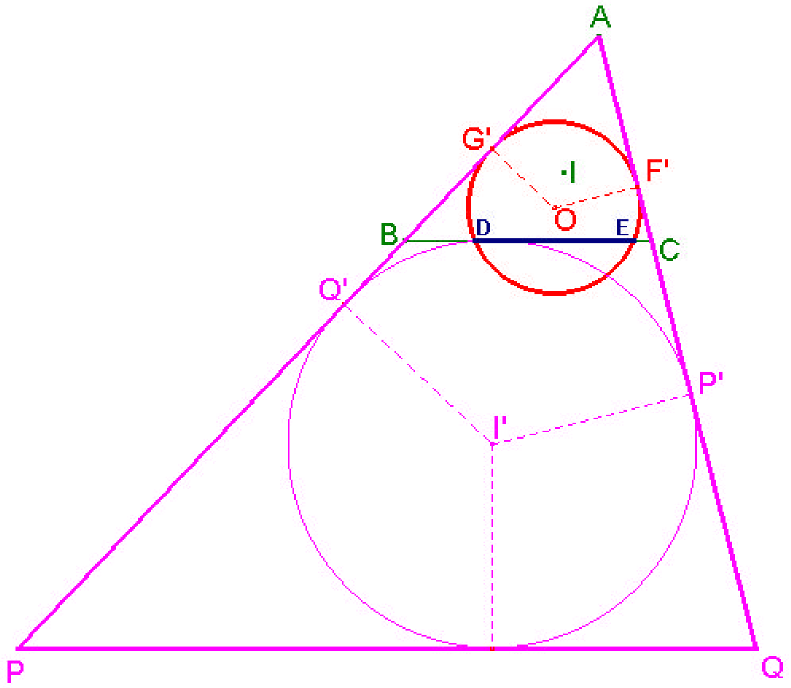
$$\boxed{a\ .(p + \rho)\ =\ 2.s.(\rho - r)}$$

ii) Demostrar también que si la circunferencia de radio corta a BC en los puntos D y E, entonces $DE = \frac{4\sqrt{r.r_a.(\rho - r).(r_a - \rho)}}{r_a - r}$, donde r_a es el radio de la circunferencia exinscrita correspondiente a A.

Sol:

Esta “nueva” situación recuerda sobremanera a la situación del apartado anterior, siempre que entendamos los siguientes acuerdos:

La circunferencia exinscrita al triángulo ABC correspondiente al vértice A no es otra que la circunferencia inscrita al triángulo APQ. Por tanto, el radio r’ de esta última será igual a r_a.



La circunferencia tangente a los lados AB y AC del triángulo ABC no es otra que la circunferencia tangente a los lados AP y AQ del triángulo APQ. Su radio es igual a ρ y la distancia del centro hasta el lado PQ es igual a $p' = \sqrt{\rho^2 - \frac{1}{4}DE^2} + 2.r_a$.

Por otro lado, $PQ = a' = a.r_a / r$ y el perímetro del triángulo APQ será igual a $2s' = 2s.\ r_a / r$. En definitiva, aplicando el resultado del apartado anterior antes visto, tenemos que: $a'(p'-\rho) = 2s'.(r'-\rho)$.

Sustituyendo y operando convenientemente llegamos a las siguientes expresiones:

$$a.r_a / r .[\sqrt{\rho^2 - \frac{1}{4}DE^2} + 2.r_a - \rho] = 2s.\ r_a / r.(r_a - \rho);$$

$$a.[\sqrt{\rho^2 - \frac{1}{4}DE^2} + 2.r_a - \rho] = 2s.(r_a - \rho);$$

$$[\sqrt{\rho^2 - \frac{1}{4}DE^2} + 2.r_a - \rho] = 2.s/a.(r_a - \rho);$$

Teniendo en cuenta la relación de semejanza existente entre las circunferencias inscrita y exinscrita a un mismo triángulo ABC, obtenemos que $r/ r_a = (s-a)/ s$. De donde $s/a = r_a / (r_a - r)$. Sustituyendo ahora esta expresión en la última identidad llegamos a los siguientes resultados:

$$[\sqrt{\rho^2 - \frac{1}{4}DE^2} + 2.r_a - \rho] = 2.\ (r_a - \rho).\ r_a / (r_a - r);$$

$$\sqrt{\rho^2 - \frac{1}{4}DE^2} = [2.\ (r_a - \rho).\ r_a - (2.r_a - \rho).(r_a - r)\ ]/ (r_a - r);$$

$\sqrt{\rho^2 - \frac{1}{4}DE^2}$ = [(2.r_a –2.ρ – 2.r_a +ρ). r_a + (2.r_a –ρ).r]/ (r_a–r);

$\sqrt{\rho^2 - \frac{1}{4}DE^2}$ = [–ρ.r_a + (2.r_a –ρ).r]/ (r_a–r);

¼ DE^2 = ρ^2 – [–ρ.r_a + (2.r_a –ρ).r]^2 / (r_a–r)^2;

¼ DE^2 = [(ρ.(r_a –r) –ρ.r_a + (2.r_a –ρ).r) / (r_a–r)]. [(ρ.(r_a –r) +ρ.r_a – (2.r_a –ρ).r) / (r_a–r)]

¼ DE^2 = [2.(r_a –ρ).r / (r_a–r)]. [2.r_a .(ρ – r) / (r_a–r)]

DE^2 = [16.r_a .r (r_a –ρ).(ρ – r)]/ (r_a–r)^2

Es decir,

$$DE = \frac{4\sqrt{r.r_a.(\rho - r).(r_a - \rho)}}{r_a - r}$$, c.q.d.

Saludos de F. Damián Aranda Ballesteros. Córdoba (España)

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI