



Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática
Número 9 (Septiembre-October 2003)
ISSN – 1698-277X

ÍNDICE

Artículos, Notas y Lecciones de preparación olímpica

M. Amengual Covas: **La desigualdad de Euler (2ª parte)**

Problemas para alumnos de Educación Media y de Olimpiadas

Problemas de la **XVIII Olimpiada Iberoamericana de Matemática (2003)**

Problemas para los más jóvenes

Problemas de la **Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe (2003)**

Problemas de la **XIV Olimpiada del Cono Sur (2003)**

Problemas resueltos

Problema 33, de David Krumm

Problema 39, de F. Damián Aranda y de Ricardo Barroso

Problema 40, de F. Damián Aranda.

Problemas propuestos

En este apartado se invita a los lectores a resolver cinco problemas y enviarnos sus soluciones. Las más originales serán publicadas.

Divertimentos matemáticos

Supuesta boda de una hija de Nicolás Bourbaki

Reseñas web

NRICH, de la Universidad de Cambridge.

La desigualdad de Euler a partir de otras desigualdades entre elementos de un triángulo.

Este artículo es continuación del publicado en el número 5 (enero-febrero 2003). En esta segunda parte se establecen seis desigualdades geométricas y dos trigonométricas, elementales las ocho, de las que se deduce inmediatamente la desigualdad de Euler.

Las notaciones que se hacen servir son las habituales para un triángulo ABC .

$$8. \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \geq \frac{2}{R}$$

Multiplicando miembro a miembro las siguientes desigualdades

$$a = (s-b) + (s-c) \geq 2\sqrt{(s-b)(s-c)}$$

$$b = (s-c) + (s-a) \geq 2\sqrt{(s-c)(s-a)}$$

$$c = (s-a) + (s-b) \geq 2\sqrt{(s-a)(s-b)}$$

resulta

$$abc \geq 8(s-a)(s-b)(s-c)$$

que, habida cuenta de la fórmula

$$r^2 s = (s-a)(s-b)(s-c), \quad (1)$$

obtenida a partir de la Herón y de la expresión rs para el área del triángulo, escribimos equivalentemente en la forma

$$\frac{1}{2rs} \geq \frac{4r}{abc}.$$

Multiplicando ambos miembros de esta última por

$$a+b+c = 2s \quad (2)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{a+b+c}{2rs} &\geq 2 \cdot \frac{4rs}{abc} \\ &= \frac{2}{R} \quad (\text{pues } abc = 4Rrs \quad (3)) \end{aligned}$$

Resta tan sólo observar que

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{a}{2rs} + \frac{b}{2rs} + \frac{c}{2rs} \quad (\text{por (2)}) \\ &= \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \quad (rs = \frac{1}{2}ah_a, \text{ etc}) \end{aligned}$$

para obtener la desigualdad enunciada.

Tal desigualdad es equivalente a

$$9. \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \geq \frac{2}{R}$$

donde r_a, r_b, r_c son los radios de las circunferencias excritas al triángulo ABC .

En efecto, a partir de las conocidas relaciones

$$r_a(s-a) = r_b(s-b) = r_c(s-c) = rs$$

resulta inmediatamente

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} &= \frac{s-a}{rs} + \frac{s-b}{rs} + \frac{s-c}{rs} \\ &= \frac{1}{r} \end{aligned}$$

$$10. \quad 6 \leq \frac{r_a+r_b}{r_c} + \frac{r_b+r_c}{r_a} + \frac{r_c+r_a}{r_b} = \frac{4R-2r}{r}$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{r_a+r_b}{r_c} + \frac{r_b+r_c}{r_a} + \frac{r_c+r_a}{r_b} &= \left(\frac{r_a}{r_b} + \frac{r_b}{r_a} \right) + \left(\frac{r_b}{r_c} + \frac{r_c}{r_b} \right) + \left(\frac{r_c}{r_a} + \frac{r_a}{r_c} \right) \\ &\geq 2 + 2 + 2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Por otra parte, a partir de las relaciones (2), (3) y $ab+bc+ca = r^2 + s^2 + 4Rr$ y siendo

$$\frac{r_a+r_b}{r_c} = \frac{\frac{s-a}{rs} + \frac{s-b}{rs}}{\frac{s-c}{rs}} = \frac{c}{s-c}$$

y cíclicamente, resulta

$$\begin{aligned}
\frac{r_a+r_b}{r_c} + \frac{r_b+r_c}{r_a} + \frac{r_c+r_a}{r_b} &= \frac{c}{s-c} + \frac{a}{s-a} + \frac{b}{s-b} \\
&= \frac{(a+b+c)s^2 - 2(ab+bc+ca)s + 3abc}{(s-a)(s-b)(s-c)} \\
&= \frac{2s \cdot s^2 - 2s(r^2 + s^2 + 4Rr) + 12Rrs}{r^2s} \\
&= \frac{4R-2r}{r}
\end{aligned}$$

$$11. \quad 9r \leq r_a + r_b + r_c \leq \frac{9R}{2}$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
r_a + r_b + r_c &= \frac{rs}{s-a} + \frac{rs}{s-b} + \frac{rs}{s-c} \\
&= r \cdot [(s-a) + (s-b) + (s-c)] \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} \right) \\
&\geq r \cdot 9,
\end{aligned}$$

que es la primera desigualdad.

La segunda puede escribirse en la forma

$$\frac{rs}{s-a} + \frac{rs}{s-b} + \frac{rs}{s-c} \leq \frac{9abc}{8rs}$$

que es equivalente a

$$9abc - 8r^2s^2 \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} \right) \geq 0$$

la cual, en función de $x = s - a > 0$, $y = s - b > 0$, $z = s - c > 0$ se escribe

$$9(x+y)(y+z)(z+x) - 8xyz(x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 0$$

reduciéndose a

$$x^2y + x^2z + xy^2 + xz^2 + y^2z + yz^2 - 6xyz \geq 0.$$

La validez de esta última se establece inmediatamente a partir de la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica: en efecto,

$$x^2y + x^2z + xy^2 + xz^2 + y^2z + yz^2 \geq 6\sqrt{(x^2y)(x^2z)(xy^2)(xz^2)(y^2z)(yz^2)}$$

$$= 6xyz$$

$$12. \quad 3R \leq a \cdot \tan \frac{A}{2} + b \cdot \tan \frac{B}{2} + c \cdot \tan \frac{C}{2} \leq 5R - 4r$$

Si expresamos en función $x = s - a > 0$, $y = s - b > 0$, $z = s - c > 0$ las tangentes de los semiángulos así como las longitudes que aparecen, obtenemos

$$3 \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4\sqrt{(x+y+z)xyz}} \leq \sum (y+z) \sqrt{\frac{yz}{(x+y+z)x}} \leq 5 \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4\sqrt{(x+y+z)xyz}} - 4\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}$$

que se reduce a

$$3(x+y)(y+z)(z+x) \leq \sum 4yz(y+z) \leq 5(x+y)(y+z)(z+x) - 16xyz$$

Una y otra desigualdades son equivalentes a la desigualdad

$$x^2y + x^2z + xy^2 + xz^2 + y^2z + yz^2 - 6xyz \geq 0$$

que hemos visto anteriormente.

$$13. \quad 9r \leq m_a + m_b + m_c \leq \frac{9R}{2}$$

Si aplicamos la desigualdad de Cauchy

$$(ux + vy + wz)^2 \leq (u^2 + v^2 + w^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$

con $u = m_a$, $v = m_b$, $w = m_c$, $x = y = z = 1$ y tenemos en cuenta la relación

$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$ así como la desigualdad $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$, la cual

resulta inmediatamente de la fórmula $OG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$ que expresa el cuadrado de la distancia entre el circuncentro y el baricentro del triángulo, obtenemos

$$m_a + m_b + m_c \leq \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} = \sqrt{\frac{9(a^2 + b^2 + c^2)}{4}} \leq \frac{9R}{2}$$

verificándose la igualdad si y sólo si el triángulo es equilátero.

Por otra parte, multiplicando miembro a miembro las desigualdades

$$s(s-a) = \frac{(b+c)^2 - a^2}{4} \geq \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} = m_a^2,$$

etc., resulta, habida cuenta de (1),

$$m_a m_b m_c \geq rs^2$$

y, toda vez que

$$s = (s-a) + (s-b) + (s-c) \geq 3\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \underset{\text{por(1)}}{=} 3\sqrt[3]{r^2 s}$$

o, equivalentemente,

$$s^2 \geq 27r^2$$

obtenemos

$$m_a + m_b + m_c \geq 3\sqrt[3]{m_a m_b m_c} \geq 3\sqrt[3]{rs^2} \geq 3\sqrt[3]{27r^3} = 9r$$

verificándose la igualdad si y sólo si el triángulo es equilátero.

$$14. \quad \cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{B-C}{2} \cos \frac{C-A}{2} \geq \frac{2r}{R}$$

Sustituyendo $\frac{2r}{R}$ por su igual $8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$, obtenemos

$$8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{B-C}{2} \cos \frac{C-A}{2} \quad (4)$$

equivalente a la propuesta.

Siendo $\sin \frac{A}{2} = \frac{\sin A}{2 \cos \frac{A}{2}}$, etc. y positivos los números $\cos \frac{A}{2}$, $\cos \frac{B}{2}$ y $\cos \frac{C}{2}$,

la desigualdad (4) se escribe equivalentemente

$$\sin A \sin B \sin C \leq \cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{C}{2} + \cos \frac{B-C}{2} \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{C-A}{2} \cos \frac{B}{2} \quad (5).$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{C}{2} &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{A-B+C}{2} + \cos \frac{A-B-C}{2} \right), \\ \cos \frac{A-B+C}{2} &= \cos \frac{p-2B}{2} = \sin B \end{aligned}$$

y

$$\cos \frac{A-B-C}{2} = \cos \frac{-A+B+C}{2} = \cos \frac{p-2A}{2} = \sin A$$

de donde se sigue

$$\cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{\sin A + \sin B}{2}$$

y cíclicamente.

Para establecer la validez de (5), hacemos servir la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica en la siguiente:

$$\begin{aligned} \cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{C}{2} + \cos \frac{B-C}{2} \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{C-A}{2} \cos \frac{B}{2} &= \\ &= \frac{\sin A + \sin B}{2} + \frac{\sin B + \sin C}{2} + \frac{\sin C + \sin A}{2} \\ &\geq \sqrt{\sin A \cdot \sin B} \cdot \sqrt{\sin B \cdot \sin C} \cdot \sqrt{\sin C \cdot \sin A} \\ &= \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \end{aligned}$$

$$15. \quad 9r \leq h_a + h_b + h_c \leq \frac{9R}{2}$$

Tenemos

$$(h_a + h_b + h_c) \cdot \frac{1}{r} = (h_a + h_b + h_c) \cdot \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right) \geq 9,$$

de donde

$$(h_a + h_b + h_c) \geq 9r.$$

Por otra parte, la siguiente desigualdad

$$a = (s-b) + (s-c) \geq 2\sqrt{(s-b) \cdot (s-c)}$$

es equivalente a

$$a^2 \geq 4(s-b) \cdot (s-c)$$

y la escribimos en la forma

$$\frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} \geq \frac{4}{a}.$$

Análogamente,

$$\frac{1}{s-c} + \frac{1}{s-a} \geq \frac{4}{b} \quad \text{y} \quad \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} \geq \frac{4}{c}.$$

La suma de estas tres últimas desigualdades es

$$\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} \geq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

la cual, después de multiplicar por el valor S del área del triángulo se reduce a

$$r_a + r_b + r_c \geq h_a + h_b + h_c ,$$

de la que resulta (ver la desigualdad número 11)

$$h_a + h_b + h_c \leq \frac{9R}{2}$$

Bibliografía.

O. Bottema et al., *Geometric Inequalities*, Groningen, 1969.

DS Mitrinovic et al., *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Kluwer Ac. Publishers, The Netherlands, 1989.

Mihály Bencze, ‘Problem 2717’, *Crux Mathematicorum*, 29, 2 (2003), 119-120.

I.V. Maftei y M. A. Nicolae, ‘Asupra unor relatii de evaluare într-un triunghi’, *Gazeta Matematica*, nr. 10/2002, 379-387.

Post Scriptum. Mi interés por las desigualdades geométricas empezó con la invitación del profesor Josep Grané i Manlleu de la Universitat Politècnica de Catalunya a que colaborara en la edición de 1999 del libro “Sessions de preparació per a l’olimpíada matemàtica” que edita la Societat Catalana de Matemàtiques.

La aceptación me llevó a intentar una tarea que, a la hora de la verdad, ha resultado bastante fructífera.

Mi reconocimiento y afecto al profesor Grané y a Francisco Bellot Rosado, de Valladolid, catedrático y editor de esta Revista Escolar de la OIM, como impulsores del olimpismo matemático en España, así como mi agradecimiento a ambos por haberme dado siempre, con creces, toda la ayuda que les he pedido.

Cala Figuera, Mallorca, junio 2003

XVIII Olimpiada Iberoamericana de Matemática
Segundo Día
17 de septiembre de 2003

4. Sea $M = \{1, 2, \dots, 49\}$ el conjunto de los primeros 49 enteros positivos. Determine el máximo entero k tal que el conjunto M tiene un subconjunto de k elementos en el que no hay 6 números consecutivos. Para ese valor máximo de k , halle la cantidad de subconjuntos de M , de k elementos, que tienen la propiedad mencionada.
5. En el cuadrado $ABCD$, sean P y Q puntos pertenecientes a los lados BC y CD respectivamente, distintos de los extremos, tales que $BP=CQ$. Se consideran puntos X e Y , $X \neq Y$, pertenecientes a los segmentos AP y AQ respectivamente. Demuestre que, cualesquiera sean X e Y , existe un triángulo cuyos lados tienen las longitudes de los segmentos BX , XY y DY .
6. Se definen las sucesiones $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ por:

$$a_0 = 1, \quad b_0 = 4 \quad \text{y}$$
$$a_{n+1} = a_n^{2001} + b_n, \quad b_{n+1} = b_n^{2001} + a_n \quad \text{para } n \geq 0.$$

Demuestre que 2003 no divide a ninguno de los términos de estas sucesiones.

Duración: 4½ horas
Cada problema vale siete puntos

Versión en español

XVIII Olimpíada Ibero-americana de Matemática
Segundo Dia
17 de Setembro de 2003

4. Seja $M = \{1, 2, \dots, 49\}$ o conjunto dos primeiros 49 inteiros positivos. Determine o maior inteiro k tal que o conjunto M tenha um subconjunto de k elementos em que não haja 6 números consecutivos. Para esse valor máximo de k , encontre a quantidade de subconjuntos de M , de k elementos, que tenham a propriedade mencionada.
5. No quadrado $ABCD$, sejam P e Q pontos pertencentes aos lados BC e CD respectivamente, distintos dos extremos, tais que $BP=CQ$. Consideram-se pontos X e Y , $X \neq Y$, pertencentes aos segmentos AP e AQ respectivamente. Demonstre que, quaisquer que sejam X e Y , existe um triângulo cujos lados têm os comprimentos dos segmentos BX , XY e DY .
6. Definem-se as sucessões $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ por:

$$a_0 = 1, \quad b_0 = 4 \quad \text{e}$$
$$a_{n+1} = a_n^{2001} + b_n, \quad b_{n+1} = b_n^{2001} + a_n \quad \text{para } n \geq 0.$$

Demonstre que 2003 não divide nenhum dos termos destas sucessões.

Duração: 4½ horas
Cada problema vale sete pontos

Versão em português

V Olimpiada Matemática Centroamericana y del Caribe.

Costa Rica, 26 de Agosto de 2003.
Primer día

Problema 1. Dos jugadores A y B , juegan por turnos el siguiente juego: Se tiene un montón de 2003 piedras. En su primer turno, A escoge un divisor de 2003, y retira ese número de piedras del montón inicial. Posteriormente, B escoge un divisor del número de piedras restantes, y retira ese número de piedras del nuevo montón, y siguen así sucesivamente. Pierde el jugador que retire la última piedra. Demostrar que uno de los dos jugadores tiene una *estrategia ganadora* y describir dicha estrategia.

Nota: Se entiende por *estrategia ganadora* un método de juego que le garantiza la victoria al que lo aplica sin importar lo que haga su oponente.

Problema 2. Sea S una circunferencia y AB un diámetro de ella. Sea t la recta tangente a S en B y considere dos puntos C, D en t tales que B esté entre C y D . Sean E y F las intersecciones de S con AC y AD y sean G y H las intersecciones de S con CF y DE . Demostrar que $AH = AG$.

Problema 3. Sean a, b enteros positivos, con $a > 1$ y $b > 2$. Demostrar que $a^b + 1 \geq b(a + 1)$ y determinar cuándo se tiene la igualdad.

Tiempo: 4 horas 30 minutos.
Cada Problema vale 7 puntos.

V Olimpiada Matemática Centroamericana y del Caribe.

Costa Rica, 27 de Agosto de 2003.
Segundo día

Problema 4. Sean S_1 y S_2 dos circunferencias que se intersectan en dos puntos distintos P y Q . Sean ℓ_1 y ℓ_2 dos rectas paralelas, tales que:

- i. ℓ_1 pasa por el punto P e intersecta a S_1 en un punto A_1 distinto de P y a S_2 en un punto A_2 distinto de P .
- ii. ℓ_2 pasa por el punto Q e intersecta a S_1 en un punto B_1 distinto de Q y a S_2 en un punto B_2 distinto de Q .

Demostrar que los triángulos A_1QA_2 y B_1PB_2 tienen igual perímetro.

Problema 5. Un tablero cuadrado de 8cm de lado se divide en 64 casillas cuadradas de 1cm de lado cada una. Cada casilla se puede pintar de blanco o de negro. Encontrar el número total de maneras de colorear el tablero de modo tal que cada cuadrado de 2cm de lado formado por cuatro casillas con un vértice común, contenga dos casillas blancas y dos negras.

Problema 6. Digamos que un entero positivo es *tico* si la suma de sus dígitos (en base 10) es múltiplo de 2003.

- i. Demostrar que existe un entero positivo N tal que sus primeros 2003 múltiplos, $N, 2N, 3N, \dots, 2003N$, son todos *ticos*.
- ii. ¿Existe algún entero positivo N tal que todos sus múltiplos sean *ticos*?

Tiempo: 4 horas 30 minutos.
Cada Problema vale 7 puntos.

V Olimpiada Matemática Centroamericana y del Caribe.

Costa Rica, 25 al 30 de Agosto de 2003.
Soluciones Prueba 1 y Prueba 2

Problema 1.

Solución oficial: Mostraremos que el jugador B tiene estrategia ganadora. Nótese que en cada jugada se retira al menos 1 piedra, por lo que siempre debe existir un perdedor.

Al inicio, A en su turno recibe un montón impar de piedras (2003). Como todos los divisores de un impar son impares, A dejará a B un número par de piedras (impar-impar = par).

- Si le deja 0 piedras, que es par, B gana.
- Si le deja un número par de piedras mayor a 0, B retira cualquier divisor impar del número de piedras restantes (por ejemplo 1) y de este modo le deja de nuevo a A un montón impar de piedras. Si B repite sucesivamente este método nunca perderá ya que siempre deja al menos 1 piedra. Entonces A será el perdedor y B se asegura la victoria.

Problema 2.

Solución oficial: Como $\angle AGB = \angle AHB = 90^\circ$ y los triángulos AGB y AHB tienen el lado común AB , serán suficiente con demostrar que $\angle ABH = \angle ABG$ pues entonces los triángulos AGB y AHB son congruentes y por tanto $AG = AH$.

Como $AEBH$ y $AGBF$ son cuadriláteros cíclicos, entonces $\angle AEH = \angle ABH$ y $\angle GBA = \angle GFA$.

Ahora, como $\angle AEH + \angle CED = 180^\circ = \angle GFA + \angle CFD$, si $\angle CED = \angle CFD$, entonces $\angle AEH = \angle GFA$.

Para demostrar que $\angle CED = \angle CFD$ basta demostrar que $CEFD$ es cíclico. Esto se sigue de ver que el triángulo ABE es semejante al triángulo ABC y que el triángulo AFB es semejante al triángulo ABD .

Entonces de la primera semejanza, $AB^2 = AE \cdot AC$ y de la segunda semejanza, $AB^2 = AD \cdot AF$. En consecuencia, $AE \cdot AC = AD \cdot AF$ y $CEFD$ es cíclico.

Otra manera de probar que $CEFD$ es cíclico es observando que los triángulos AEB y ABC son semejantes ya que son rectángulos y comparten el ángulo $\angle EAB = \angle CAB$. Por lo tanto $\angle ABE = \angle BCA$.

Además $\angle ABE = \angle AFE$ ya que $ABEF$ es cíclico y ambos ángulos subtienen el mismo arco. Luego

$$\angle EFD = 180^\circ - \angle AFE = 180^\circ - \angle ABE = 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - \angle ECD.$$

Por lo tanto, $\angle EFD + \angle ECD = 180^\circ$ y $CEFD$ es cíclico.

Problema 3.

Solución oficial: Se procederá por inducción sobre b .

Para $b = 3$, se tiene que $a^3 + 1 = (a+1)(a^2 - a + 1)$. Para mostrar que esta expresión es mayor que $3(a+1)$ es suficiente demostrar que $(a^2 - a + 1) \geq 3$, lo cual es cierto pues $a^2 - a + 1 > a(a-1) \geq 2$.

Ahora supóngase que la expresión es cierta para algún valor de b , es decir, se cumple que $a^b + 1 \geq b(a+1)$. Se demostrará ahora para $b+1$.

Nótese que

$$a^{b+1} + 1 = a(a^b + 1) - (a+1) + 2 \geq ab(a+1) - (a+1) + 2,$$

donde la última desigualdad se tiene por la hipótesis de inducción. La última expresión se puede reescribir como

$$ab(a+1) - (a+1) + 2 = (a+1)(ab-1) + 2 > (ab-1)(a+1).$$

Finalmente, $ab-1 \geq 2b-1 = (b+1) + (b-2) > b+1$, lo cual es cierto.

Por tanto, la desigualdad se vuelve estricta después de $b = 3$. Retomando el caso $b = 3$, se observa que $a(a-1) = 2$ únicamente cuando $a = 2$. Por tanto, se ha demostrado por inducción que la desigualdad siempre se tiene, y que la igualdad se da únicamente en el caso $a = 2, b = 3$. Esto concluye la solución.

Solución alternativa 1: $a \geq 2, b \geq 3$, dividimos en dos casos:

1. b impar.

$$a^b + 1 = (a+1)(a^{b-1} - a^{b-2} + a^{b-3} - a^{b-4} + \dots + a^2 - a + 1)$$

como $a + 1 > 0$, basta demostrar que

$$(a^{b-1} - a^{b-2}) + (a^{b-3} - a^{b-4}) + \cdots + (a^2 - a) + 1 \geq b \quad (*).$$

Del lado izquierdo tenemos $\frac{b-1}{2}$ sumandos entre paréntesis, cada uno de ellos mayor o igual a $a^2 - a = a(a-1) \geq 2 \cdot 1 = 2$. Por tanto el lado izquierdo es mayor o igual a $\frac{b-1}{2}$ veces 2 mas 1, es decir, mayor o igual a b . Con ello se prueba la desigualdad requerida (*).

Obsérvese que si $a > 2$ entonces $a^2 - a > 2$ y la desigualdad es estricta.

Además, todos los sumandos entre paréntesis en (*) son de la forma $a^n(a^2 - a)$ con $n \geq 0$ par.

Luego, si $n \geq 2$, $a^n(a^2 - a) \geq a^2(a^2 - 1) \geq 4 \cdot 2 = 8 > 2$. Entonces, si $b > 3$ en (*) hay más de un sumando entre paréntesis y por tanto alguno mayor a 2. Así, la desigualdad es estricta para $b > 3$.

2. b par. Utilizaremos el caso anterior.

$$\begin{aligned} a^b + 1 &= a^{b-1} + 1 + a^{b-1}(a-1) \geq (b-1)(a+1) + a^{b-1}(a-1) \\ &\geq (b-1)(a+1) + a^{b-1} = b(a+1) + a^{b-1} - a - 1. \end{aligned}$$

Para concluir, nótese que como $b-1 \geq 3$, $a^{b-1} - a - 1 > 0$. Así que

$$a^b + 1 \geq b(a+1) + a^{b-1} - a - 1 > b(a+1).$$

La igualdad ocurre sólo si $a = 2$ y $b = 3$.

Solución alternativa 2: Se procederá por inducción sobre a .

Para $a = 2$ se tiene que mostrar que

$$2^b + 1 \geq 3b.$$

Esta desigualdad se probará, a su vez por inducción sobre b .

Para $b = 3$, $2^3 + 1 = 3 \cdot 3$ y se cumple la igualdad para $a = 2, b = 3$. Supóngase que $2^b + 1 \geq 3b$ para un valor de $b \geq 3$. Como se cumple que $2^b > 3$, sumando ambas desigualdades se tiene que $2^{b+1} + 1 \geq 3(b+1)$ con lo cual además vemos que si $a = 2$ sólo hay igualdad para $b = 3$.

Ahora concluiremos la inducción. Supongamos que

$$a^b + 1 \geq b(a+1),$$

para algún valor de $a \geq 2$ y $b \geq 3$. Luego

$$(a+1)^b + 1 = a^b + \binom{b}{1}a^{b-1} + \dots + 1^b + 1 \geq b(a+2).$$

Esto completa la inducción y además muestra que si $a > 2$, no se cumple la igualdad. Por tanto, la desigualdad siempre se tiene, con igualdad solamente si $a = 2$ y $b = 3$.

Solución alternativa 3:

Notemos que $2^n \geq n + 1$ para $n \geq 0$. Entonces, si $a = 2$ tenemos

$$a^b = 2^b = 4 \cdot 2^{b-2} \geq 4(b-1),$$

y claramente $4(b-1) > 3b-1$ pra $b > 3$. Para $b = 3$ se da la igualdad.

Ahora, si $a > 2$ tenemos

$$\begin{aligned} a^b &= (1 + (a-1))^b \geq (a-1)^b + b(a-1) + 1 \geq 2^b + b(a-1) + 1 \\ &= 2 \cdot 2^{b-1} + b(a-1) + 1 > 2(b-1) + b(a-1) + 1 = b(a+1) - 1. \end{aligned}$$

Solución alternativa 4: Consideramos las sucesiones de números entre 1 y a de longitud b . En total, hay a^b sucesiones de éstas. Veremos que si $a \geq 3$ ó $a = 2$ y $b \geq 4$ hay al menos $(a+1)b$ sucesiones distintas.

Caso $a \geq 3$:

$$\begin{aligned} \underbrace{11 \dots 1k1 \dots 1}_b \text{ con } k > 1 &\rightarrow (a-1)b \text{ sucesiones} \\ \underbrace{11 \dots 122 \dots 1}_b &\rightarrow b \text{ sucesiones} \\ \underbrace{11 \dots 133 \dots 1}_b &\rightarrow b \text{ sucesiones} \end{aligned}$$

en estos últimos casos consideramos también $21 \dots 12$ y $31 \dots 13$

Luego, $(a-1)b + b + b = (a+1)b$

Caso $a = 2, b > 3$:

$$\underbrace{11 \dots 121 \dots 1}_b \rightarrow b \text{ sucesiones}$$

$$\underbrace{11 \dots 1221 \dots 1}_b \rightarrow b \text{ sucesiones}$$

$$\underbrace{11 \dots 12221 \dots 1}_b \rightarrow b \text{ sucesiones}$$

en estos últimos casos consideramos también $21 \dots 12$ y $2211 \dots 12$ y $21 \dots 122$. Nótese que las sucesiones el último caso son distintas pues $b > 3$.

Luego si $a > 2ób > 3$

$$a^b \geq b(a+1) > b(a+1) - 1.$$

Si $a = 2yb = 3$ se da la igualdad.

Problema 4.

Solución oficial: Se demostrará que los triángulos A_1QA_2 y B_1PB_2 son congruentes, de donde el resultado se sigue de forma inmediata.

Nótese inicialmente que como $A_1P \parallel B_1Q$, entonces A_1PQB_1 es un trapecio isósceles y sus diagonales son iguales, de donde $A_1Q = B_1P$. Ahora bien, como $\angle PA_1Q = \angle PB_1Q$ por estar inscritos en el mismo arco, y $\angle PA_2Q = \angle PB_2Q$ por la misma razón, entonces $\triangle A_1QA_2$ y $\triangle B_1PB_2$ son semejantes. Como ya se demostró la igualdad entre un par de lados adyacentes, la congruencia de los triángulos se sigue, y el resultado es ahora inmediato.

Solución alternativa 1:

$\angle PA_1Q = \angle PB_1Q$, por estar inscritos en el mismo arco en S_1 .

$\angle PA_2Q = \angle PB_2Q$, por estar inscritos en el mismo arco en S_2 .

A_2B_2QP es cíclico, por lo que:

$$\angle A_2B_2Q = \angle A_1PQ(1)$$

A_1PQB_1 es cíclico, por lo que:

$$\angle A_1PQ = 180^\circ - \angle QB_1A_1(2)$$

De (1) y (2) se sigue que $\angle A_2B_2Q + \angle QB_1A_1 = 180^\circ$, por lo que $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

Así, $A_1A_2B_2B_1$ es un paralelogramo y sus lados opuestos son iguales y ello implica que $A_1A_2 = B_1B_2$.

Finalmente, por el criterio de congruencia ángulo-lado-ángulo, los triángulos A_1QA_2 y B_1PB_2 son congruentes, y el resultado se sigue.

Nota: De hecho, se puede demostrar que los triángulos A_1QA_2 y B_1PB_2 son congruentes si y sólo si $A_1A_2 \parallel B_1B_2$ o $A_1B_1 \parallel PQ \parallel A_2B_2$. Se ha utilizado la formulación propuesta para no mostrar tan claramente, desde el enunciado, lo que se debe hacer.

Solución alternativa 2:

$\angle PA_1Q = \angle PB_1Q$, y $\angle PA_2Q = \angle PB_2Q$ por estar inscritos en un mismo arco. Luego A_1A_2Q y B_1B_2P son triángulos semejantes. La altura correspondiente a Q y a P en dichos triángulos es la distancia entre las rectas paralelas ℓ_1 y ℓ_2 . Por tanto, por tener una altura correspondiente igual y ser semejantes, A_1A_2Q y B_1B_2P son congruentes y el resultado se sigue.

Problema 5.

Solución oficial: Coloreemos la primera fila de casillas de cualquier manera y tratemos de extender la coloración a todo el tablero. Si dos casillas consecutivas de la primera fila tienen el mismo color, las dos que están debajo de ellas en la segunda fila deben recibir el color opuesto, y es fácil ver que hay una única manera admisible de colorear las casillas restantes de la segunda fila, a saber, con el color opuesto al de la casilla correspondiente en la primera fila. Este razonamiento se repite para la tercera, la cuarta... hasta la última fila. En cambio si en la primera fila no hay casillas consecutivas del mismo color, es decir si se colorea BNBNNBNB o NBNBNBNB, entonces la segunda fila admite cualquiera de esas dos coloraciones alternadas, y lo mismo la tercera y las filas restantes. En resumen, cada una de las dos coloraciones alternadas de la primera fila se puede extender de 2^7 maneras, mientras que cada una de las $2^8 - 2$ coloraciones no alternadas se extiende de manera única. En total se obtienen entonces $2 \cdot 2^7 + 2^8 - 2 = 2^9 - 2 = 510$ coloraciones.

Solución alternativa:

Cada fila del tablero admite dos coloraciones alternadas”, a saber BNBNNBNB y NBNBNBNB. Si cada fila se colorea de alguna de estas dos maneras se obtiene $2^8 = 256$ coloraciones válidas.

Hay sólo 2 coloraciones que pueden obtenerse de ambas maneras, es decir que tienen cada fila y cada columna alternada: son las coloraciones del tablero de ajedrez (con la casilla inferior derecha blanca) y su opuesta. Por lo tanto hay $2^8 + 2^8 - 2 = 256 + 256 - 2 = 510$ coloraciones válidas que tienen todas

las filas alternadas ó todas las columnas alternadas.

Ahora veamos veamos que no hay más coloraciones válidas que éstas 510. Si hubiese otra, tendría alguna fila i con dos casillas contiguas $(i, j), (i, j + 1)$ del mismo color. Es fácil ver que para cualquier fila i' las casillas $(i, j), (i, j + 1)$ son del mismo color. Análogamente, existe una columna h con dos casillas contiguas $(k, h), (k + 1, h)$ del mismo color, y para cualquier h' se debe cumplir que $(k, h'), (k + 1, h')$ son del mismo color. Pero entonces las cuatro casillas $(k, h), (k + 1, h), (k, h'), (k + 1, h')$ serían del mismo color y por tanto la coloración del tablero no sería válida.

Problema 6.

Solución oficial:

1. i. Se construye N con 2003 unos (1's) separados por grupos de tres (3) ceros. Así:

$$N = 1000100010001 \cdots 100010001.$$

Si $s(n)$ denota la suma de los dígitos de n , entonces $s(N) = 2003$. Si k es un entero entre 1 y 2003, $N \cdot k$ es igual a 2003 k 's separados por grupo de 3,2,1 ó 0 ceros, de acuerdo a si k tiene 1,2,3 ó 4 cifras. En cualquier caso, $s(N \cdot k) = 2003k$ y $N \cdot k$ es *tico*.

- ii. Supongamos que existe un tal número N . Escribimos $N = 2^\alpha 5^\beta N_1$ donde N_1 es coprimo con 10. Sea $\gamma := \max\{\alpha, \beta\}$. Para cada entero positivo m , tenemos que $m \cdot 2^{\gamma-\alpha} \cdot 5^{\gamma-\beta} = m \cdot N_1 \cdot 10^\gamma$ y $s(mN_1 10^\gamma) = s(mN_1)$. Por lo tanto, podemos suponer que N es coprimo con 10 (si no, cambiamos N por N_1).

Como N_1 es coprimo con 10, es bien conocido que existe un múltiplo suyo A de la forma

$$A := \underbrace{11 \dots 1}_{\ell \text{ veces}}$$

(de hecho, tomando $M = 9N$ y poniendo $\ell := \phi(M)$ por el Teorema de Euler tenemos que $10^{\phi(M)} - 1 \equiv 0 \pmod{9N}$, y por lo tanto,

$$\underbrace{11 \dots 1}_{\phi(M) \text{ veces}} = \frac{10^{\phi(M)} - 1}{9}$$

se divide por N).

Entonces A es un múltiplo de N y $s(A) = \ell$. Por lo tanto ℓ es un múltiplo de 2003. De acá se puede concluir de dos maneras:

1. Entonces $6A$ y $4 \cdot 10^{\ell-1}A$ son múltiplos de N y la suma de ellos también, y es

$$\underbrace{44 \dots 4}_{\ell-2 \text{ veces}} \underbrace{5066 \dots 6}_{\ell-1 \text{ veces}}$$

cuya suma de dígitos es $4(\ell-2) + 5 + 6(\ell-1) = 10\ell - 9$. Como ℓ se divide por 2003, $10\ell - 9$ no se puede dividir por 2003, y hemos obtenido la contradicción deseada.

2. Tenemos

$$A := \underbrace{11 \dots 1}_{\ell \text{ veces}}$$

entonces $A \cdot 19$ es

$$\underbrace{99 \dots 9}_{\ell \text{ veces}} + \underbrace{11 \dots 10}_{\ell \text{ veces}} = \underbrace{211 \dots 109}_{\ell-2 \text{ veces}}$$

y por tanto $s(A \cdot 19) = \ell + 9$. Pero ℓ y $\ell + 9$ no pueden ser simultáneamente múltiplos de 2003.

Solución alternativa para ii.:

ii. La respuesta es no. Se procederá por reducción al absurdo. Supongamos que existe $N = a_1 a_2 \dots a_n$ con la propiedad que $k \cdot A$ es *tico* para todo k entero positivo. Se puede suponer sin pérdida de generalidad que $a_n \neq 0$, ya que si $N = 10^t \cdot x$, entonces x también tiene la propiedad porque $s(k \cdot 10^t \cdot x) = s(k \cdot x)$. Entonces, calcularemos $s((10^n - 1)N)$ y $s((10^{n+1} - 1)N)$:

- Si N , en base 10, es $a_1 a_2 \dots a_n$, entonces $(10^n - 1)N$, en base 10, es

$$a_1 a_2 \dots a_{n-1} (a_n - 1) (9 - a_1) (9 - a_2) \dots (9 - a_{n-1}) (10 - a_n)$$

y así $s((10^n - 1)N) = 9n$.

- $(10^{n+1} - 1)N$, en base 10, es

$$a_1 a_2 \dots a_{n-1} (a_n - 1) 9 (9 - a_1) (9 - a_2) \dots (9 - a_{n-1}) (10 - a_n)$$

y así $s((10^{n+1} - 1)N) = 9n + 9$.

Pero como $9n$ y $9n + 9$ no pueden ser ambos múltiplos de 2003, N no cumple la propiedad deseada.

2. Un argumento alternativo al dado en la parte final de ii. es el siguiente:

Se probó que $s((10^n - 1)N) = 9n$. Entonces, como $(2003,3)=1$, n es múltiplo de 2003. Pero se observa que $11N$ tiene $n + 1$ ó $n + 2$ cifras, y su última cifra es $a_n \neq 0$. Así, por el razonamiento anterior $n + 1$ ó $n + 2$ debe ser también múltiplo de 2003, lo cual es una contradicción.



Está en:

OEI - Programación - Olimpiada de Matemática - Revista Escolar de la OIM - Número 9

Último número

Presentación

XIV Olimpiada Matemática de Países del Cono Sur

Números anteriores

24 al 30 de mayo de 2003

Contactar

Ica - Perú

Suscripción gratuita

Pruebas**Primer día****Problema 1**

En un torneo de fútbol entre cuatro equipos A, B, C y D, cada equipo juega con cada uno de los otros una sola vez.

a) Decidir si es posible que al finalizar el torneo, las cantidades de goles anotados y recibidos por los equipos sean:

Equipo	A	B	C	D
Goles anotados	1	3	6	7
Goles recibidos	4	4	4	5

Si la respuesta es afirmativa, dar un ejemplo para los resultados de los seis partidos; en caso contrario, justificar por qué.

b) Decidir si es posible que, al finalizar el torneo, las cantidades de goles anotados y recibidos por los equipos sean:

Equipo	A	B	C	D
Goles anotados	1	3	6	13
Goles recibidos	4	4	4	11

Si la respuesta es afirmativa, dar un ejemplo para los resultados de los seis partidos; en caso contrario, justificar por qué.

Problema 2.

Sea la sucesión $\{a_n\}$ definida de la siguiente forma:

$$a_1=1$$

$$a_2=3$$

$$a_{n+2}=2a_{n+1} + a_{n+1}; \text{ para todo } n \text{ mayor o igual que } 1.$$

Probar que la máxima potencia de 2 que divide $a_{4006} - a_{4005}$ es 2^{2003}

Problema 3

Sea ABC un triángulo acutángulo tal que el ángulo B mide 60° . La circunferencia de diámetro AC corta a las bisectrices interiores de los ángulos A y C en los puntos M y N , respectivamente (M distinto de A y N distinto de C). La bisectriz interior del ángulo B corta a MN y AC en los puntos R y S , respectivamente. Demostrar que BR es menor o igual a RS .

Duración 4 horas.

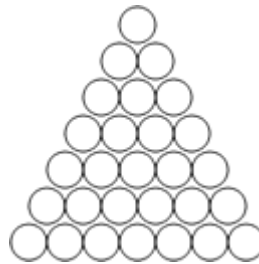
Segundo Día

Problema 4

En un triángulo acutángulo ABC , los puntos H , G y M se encuentran sobre el lado BC , de modo que AH , AG y AM son altura, bisectriz y mediana del triángulo, respectivamente. Se sabe que $HG=GM$, $AB=10$ y $AC=14$. Determinar el área del triángulo ABC .

Problema 5

Sea $n=3k+1$, donde k es un entero mayor o igual que 1. Se construye un arreglo triangular de lado n formado por círculos del mismo radio como el mostrado en la figura cuando $n=7$.



Determinar, para cada k , el mayor número de círculos que pueden colorearse de rojo de tal modo que no haya dos círculos de color rojo tangentes entre sí.

Problema 6.

Demostrar que existe una sucesión de enteros positivos $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ que satisface las dos condiciones siguientes:

- contiene exactamente una vez cada uno de los enteros positivos
- para cada $n=1,2, \dots$ la suma parcial $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ es divisible por nn

Duración: 4 horas

[Versión en portugués \(sitio OBM en PDF\)](#)

Problema 33

(I.Sharygin; comunicado al editor por el Prof. Jean-Louis Ayme, St.Denis, isla de la Reunión, Francia)

Sean C_1 y C_2 dos circunferencias secantes en P y Q . Sea t una tangente común a las dos circunferencias. Sean R y S los puntos de contacto respectivos de t con C_1 y C_2 .

Sean :

A , un punto de C_1 ;

B , el segundo punto de intersección de AP con C_2 ;

C , el segundo punto de intersección de C_1 con la paralela a BS que pasa por R ;

D , el segundo punto de intersección de CQ con C_2 .

Demostrar que RA y SD son paralelas.

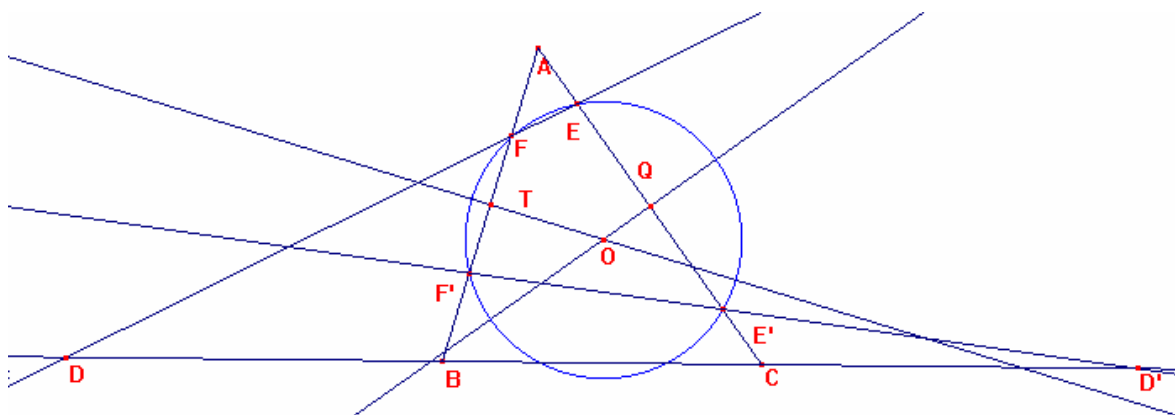
Sea T un punto sobre la recta RS en la dirección RS . Como $RC \parallel BS$, entonces $\angle CRT = \angle BST$. Por ser t tangente a ambos círculos obtenemos $\angle RAC = \angle SDB = \theta$. Esto quiere decir que una rotación del plano en θ lleva la recta AC a la recta AR , y la recta DB a la recta DS , por tanto basta probar que $AC \parallel DB$. Para ver esto, notemos que $\angle DBP = \angle DQP = \angle CQP = \angle PAC$, y terminamos.

Problema 39.-

Una circunferencia concéntrica con la circunscrita al triángulo ABC corta a AC en E y E'; a AB en F y F'. Las rectas EF y E'F' cortan a BC en D y D'. Demostrar que D y D' equidistan del centro de la circunferencia.

Solución de Ricardo Barroso Campos Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Sevilla.

Tengamos la figura correspondiente.



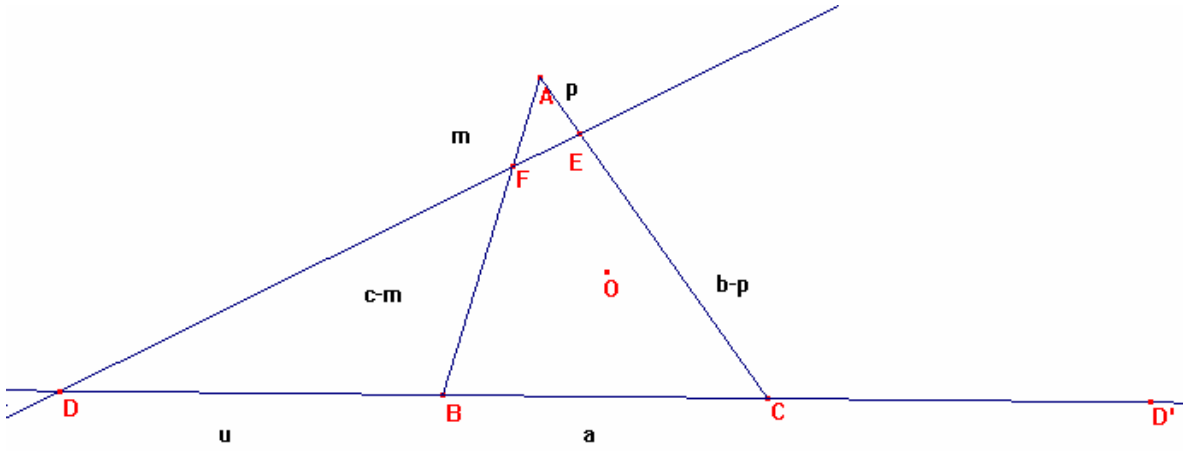
Sea $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

Por ser circunferencia concéntrica con la circunscrita, tenemos que:

$$AF = AT - TF = BT - TF' = F'B = m, \quad AE = AQ - QE = CQ - QE' = E'C = p.$$

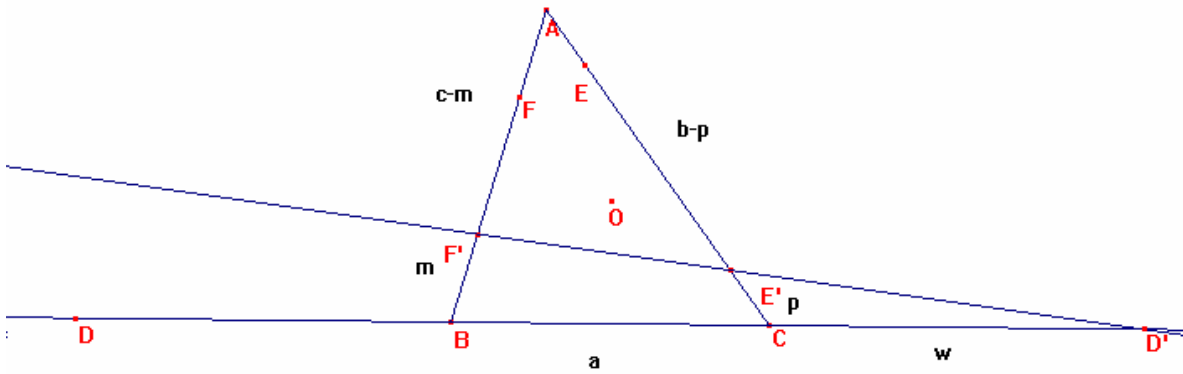
Sea $DB = u$.

Es, aplicando el teorema de Menalao (considerando longitudes absolutas sin tener en cuenta los sentidos de los segmentos) al triángulo ABC con la transversal FED:



$$u (b-p) m = (u+a) p (c-m).$$

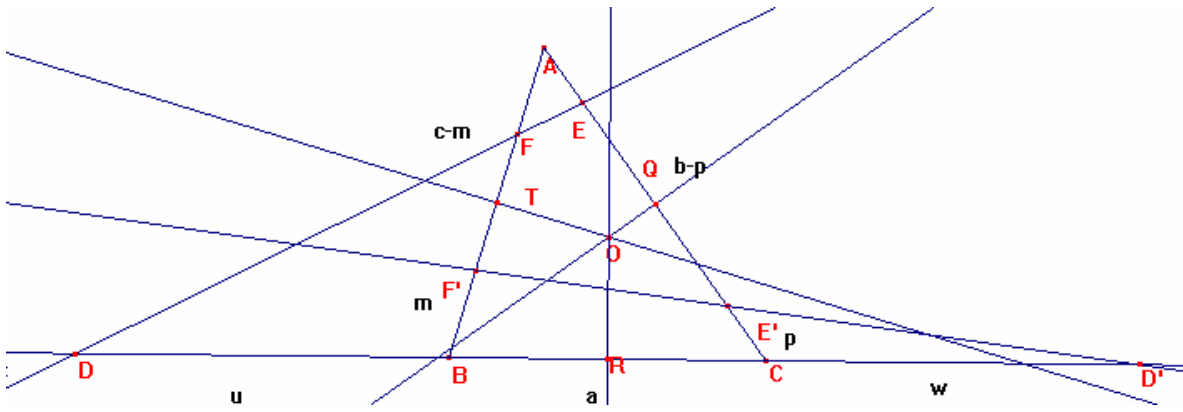
De igual modo, al tener en cuenta la configuración correspondiente, es:



$$w (b-p) (m) = (w+a) p (c-m).$$

Dividiendo ambas expresiones, nos queda:

$$u/w = (u+a)/(w+a), \text{ de donde } u=w.$$



Así, cqd, es $DR = RD'$ y por ello, $OD=OD'$

Problema 40

Una circunferencia de radio ρ es tangente a los lados AB y AC del triángulo ABC, y su centro está a una distancia p del lado BC.

i) Probar que: $a.(p - \rho) = 2s.(r - \rho)$,

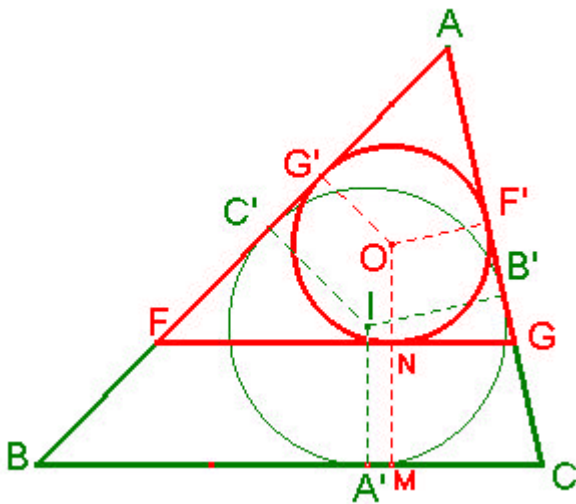
donde r es el radio de la circunferencia inscrita y $2s$ es el perímetro del triángulo.

ii) Demostrar también que si la circunferencia de radio ρ corta a BC en los puntos D y E,

entonces $DE = \frac{4\sqrt{r.r_a.(p - r).(r_a - \rho)}}{r_a - r}$, donde r_a es el radio de la circunferencia exinscrita correspondiente a A.

Sol:

i) Para una mayor comprensión del enunciado, sea considerada la siguiente ilustración:



Sea el triángulo ABC y su circunferencia inscrita de centro I y radio r .

Sea también la circunferencia tangente a los lados AB y AC en los puntos G' y F' , respectivamente.

Su centro es el punto O y el radio ρ , siendo la distancia de O hasta el lado BC igual a p .

La semejanza existente entre los triángulos ABC y AFG permite establecer la siguiente relación:

$$\frac{AC'}{AG'} = \frac{s - a}{AG'} = \frac{r}{\rho} \text{ de donde}$$

$$AG' = (s - a) \cdot \rho / r.$$

También tendremos que: $FG = a \cdot \rho / r$.

Por tanto, el semiperímetro del triángulo AFG es igual a $AG' + FG$. Así su área S' es igual a:

$$S' = [(s - a) \cdot \rho / r + a \cdot \rho / r] \cdot \rho$$

Por otro lado, el trapecio BFGC cuyas bases son FG y BC tiene como área T el valor:

$$T = 1/2 \cdot [a \cdot \rho / r + a] \cdot (p - \rho)$$

Por fin, el área S del triángulo ABC es igual a $S = s \cdot r$

Veamos que de la relación entre áreas $S' + T = S$, obtenemos la identidad deseada.

$$[(s - a) \cdot \rho / r + a \cdot \rho / r] \cdot \rho + 1/2 \cdot [a \cdot \rho / r + a] \cdot (p - \rho) = s \cdot r ;$$

$$[(s - a) \cdot \rho^2 + a \cdot \rho^2] + 1/2 \cdot [a \cdot \rho + a \cdot r] \cdot (p - \rho) = s \cdot r^2 ;$$

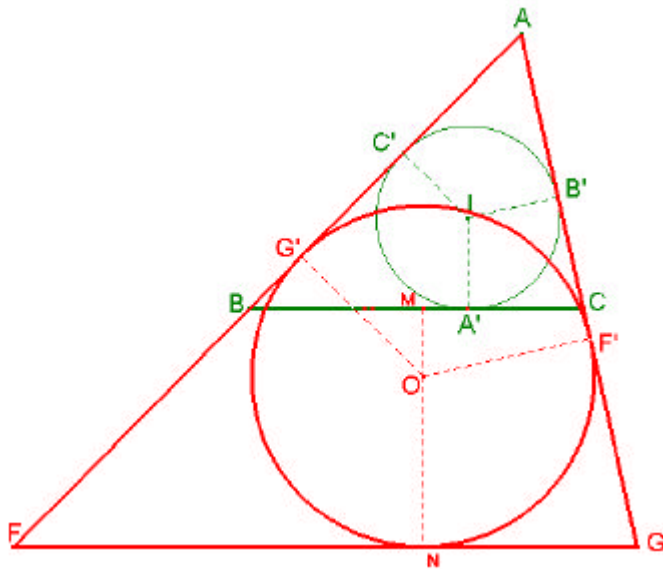
$$1/2 \cdot a \cdot (\rho + r) \cdot (p - \rho) = s \cdot r^2 - s \cdot \rho^2 ;$$

$$a \cdot (\rho + r) \cdot (p - \rho) = 2 \cdot s \cdot (r - \rho) \cdot (r + \rho) ;$$

$a \cdot (p - \rho) = 2 \cdot s \cdot (r - \rho)$

Nota: Para otra configuración diferente del triángulo tangente a los lados AB y AC del triángulo dado, el procedimiento es similar a efectos de cómputo, pero la relación antes demostrada ya no seguiría siendo válida. Busquemos la relación existente en otra situación.

Relación que sería deducida de los siguientes datos:



$$S' = [(s-a) \cdot \rho / r + a \cdot \rho / r] \cdot \rho$$

$$T = 1/2 \cdot [a \cdot \rho / r + a] \cdot (p + \rho)$$

$$S = s \cdot r$$

Entonces: $S + T = S'$ y la relación que ahora sí sería válida sería la siguiente:

$$a \cdot (p + \rho) = 2 \cdot s \cdot (\rho - r)$$

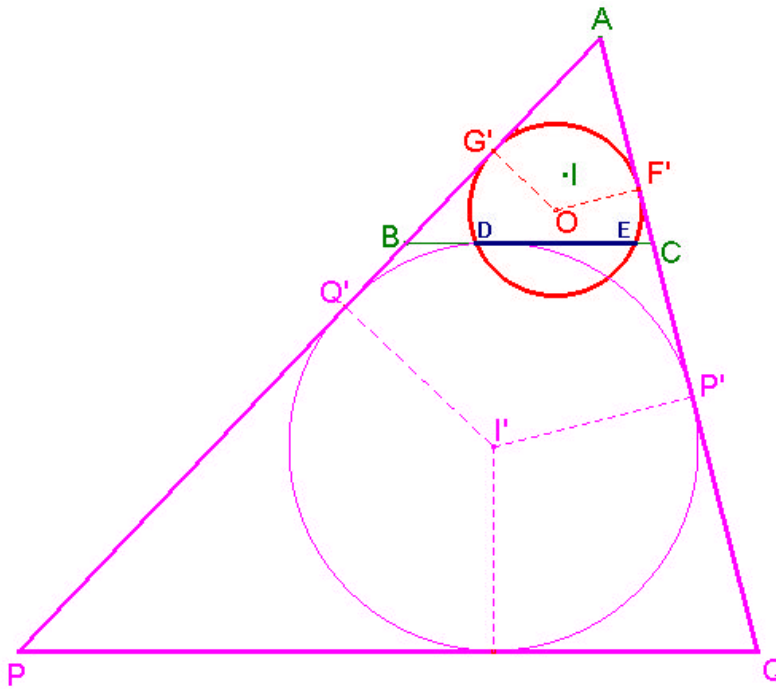
ii) Demostrar también que si la circunferencia de radio corta a BC en los puntos D y E,

entonces $DE = \frac{4\sqrt{r \cdot r_a \cdot (\rho - r) \cdot (r_a - \rho)}}{r_a - r}$, donde r_a es el radio de la circunferencia exinscrita correspondiente a A.

Sol:

Esta “nueva” situación recuerda sobremanera a la situación del apartado anterior, siempre que entendamos los siguientes acuerdos:

La circunferencia exinscrita al triángulo ABC correspondiente al vértice A no es otra que la circunferencia inscrita al triángulo APQ. Por tanto, el radio r' de esta última será igual a r_a .



La circunferencia tangente a los lados AB y AC del triángulo ABC no es otra que la circunferencia tangente a los lados AP y AQ del triángulo APQ.

Su radio es igual a ρ y la distancia del centro hasta el lado PQ es igual a

$$p' = \sqrt{\rho^2 - \frac{1}{4}DE^2} + 2 \cdot r_a.$$

Por otro lado, $PQ = a' = a \cdot r_a / r$ y el perímetro del triángulo APQ será igual a $2s' = 2s \cdot r_a / r$.

En definitiva, aplicando el resultado del apartado anterior antes visto, tenemos que:

$$a'(p' - \rho) = 2s' \cdot (r' - \rho).$$

Sustituyendo y operando convenientemente llegamos a las siguientes expresiones:

$$a \cdot r_a / r \cdot [\sqrt{\rho^2 - \frac{1}{4}DE^2} + 2 \cdot r_a - \rho] = 2s \cdot r_a / r \cdot (r_a - \rho);$$

$$a \cdot [\sqrt{\rho^2 - \frac{1}{4}DE^2} + 2 \cdot r_a - \rho] = 2s \cdot (r_a - \rho);$$

$$[\sqrt{\rho^2 - \frac{1}{4}DE^2} + 2 \cdot r_a - \rho] = 2 \cdot s/a \cdot (r_a - \rho);$$

Teniendo en cuenta la relación de semejanza existente entre las circunferencias inscrita y exinscrita a un mismo triángulo ABC, obtenemos que $r/r_a = (s-a)/s$. De donde $s/a = r_a/(r_a-r)$. Sustituyendo ahora esta expresión en la última identidad llegamos a los siguientes resultados:

$$[\sqrt{\rho^2 - \frac{1}{4}DE^2} + 2 \cdot r_a - \rho] = 2 \cdot (r_a - \rho) \cdot r_a / (r_a - r);$$

$$\sqrt{\rho^2 - \frac{1}{4}DE^2} = [2 \cdot (r_a - \rho) \cdot r_a - (2 \cdot r_a - \rho) \cdot (r_a - r)] / (r_a - r);$$

$$\sqrt{\rho^2 - \frac{1}{4} DE^2} = [(2.r_a - 2.\rho - 2.r_a + \rho). r_a + (2.r_a - \rho).r] / (r_a - r);$$

$$\sqrt{\rho^2 - \frac{1}{4} DE^2} = [-\rho.r_a + (2.r_a - \rho).r] / (r_a - r);$$

$$\frac{1}{4} DE^2 = \rho^2 - [-\rho.r_a + (2.r_a - \rho).r]^2 / (r_a - r)^2;$$

$$\frac{1}{4} DE^2 = [(\rho.(r_a - r) - \rho.r_a + (2.r_a - \rho).r) / (r_a - r)]. [(\rho.(r_a - r) + \rho.r_a - (2.r_a - \rho).r) / (r_a - r)]$$

$$\frac{1}{4} DE^2 = [2.(r_a - \rho).r / (r_a - r)]. [2.r_a .(\rho - r) / (r_a - r)]$$

$$DE^2 = [16.r_a .r (r_a - \rho).(\rho - r)] / (r_a - r)^2$$

Es decir,

$$DE = \frac{4\sqrt{r.r_a .(\rho - r).(r_a - \rho)}}{r_a - r}, \text{ c.q.d.}$$

Saludos de F. Damián Aranda Ballesteros. Córdoba (España)



Está en:
OEI - Programación - Olimpiada de Matemática - Revista Escolar de la OIM - Número 9

Último número

Problemas propuestos

Presentación

Ningún problema se considerará definitivamente cerrado. Nuevos puntos de vista sobre problemas anteriores siempre son bienvenidos.

Números anteriores

Contactar

Las soluciones deben enviarse por correo electrónico a la dirección revistaويم@oei.es, en ficheros de formato tex, ps o doc, adjuntos al mensaje. Si hubiera figuras, se incluirán en formato gif.

Suscripción gratuita

Problema 41

(Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España).

Para todo $n \geq 1$,

probar que

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{C(n,k)} \right)^n \geq e^{(n+1)-2^n}$$

Problema 42

(Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España).

Para toda terna a, b, c de números reales no nulos, demostrar que la ecuación

$$abcx^2 + 2(ab + bc + ca)x + 3(a + b + c) = 0$$

tiene todas sus raíces reales.

Problema 43

(Propuesto por Ariel Tapia Villegas, Caracas, Venezuela).

Se tiene un triángulo de lados a, b, c , y un punto P cualquiera en su interior. Se trazan por P paralelas a los lados del triángulo, que cortan a éste en los puntos A_1, A_2 (A_1A_2 es paralela a BC), B_1, B_2 (B_1B_2 es paralela a CA) y C_1, C_2 (C_1C_2 es paralela a AB). Sean

$$x_a = A_1A_2, x_b = B_1B_2, x_c = C_1C_2.$$

Demostrar que

$$\frac{x_a}{a} + \frac{x_b}{b} + \frac{x_c}{c} = 2.$$

Problema 44

(Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Ávila, España) - enunciado ligeramente modificado por el editor.

Sean b, c números reales positivos. Demostrar las desigualdades

$$1) \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}} - \sqrt{bc} \leq \frac{|b - c|}{\sqrt{2}}$$
$$2) \sqrt{b^2 + c^2} < \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

Problema 45

(Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Ávila, España)

Calcular la integral indefinida

$$\int \sqrt{\frac{1 + \tan x \tan(x - a)}{1 + \tan x \tan a}} dx,$$

siendo $0 \leq a \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

| Número 9 |
| Principal Olimpiada |
[Programación OEI](#) | [Principal OEI](#) | [Contactar](#)

**Está en:**

OEI - Programación - Olimpiada de Matemática - Revista Escolar de la OIM - Número 9

[Último número](#)

[Presentación](#)**El supuesto anuncio de la boda de una hija de Nicolás Bourbaki**

[Números anteriores](#)

(Leído en la emisora de radio France Culture, en octubre de 1988, durante la emisión titulada "Profil perdue de Nicolas Bourbaki")

[Contactar](#)

[Suscripción gratuita](#)

El señor Nicolás Bourbaki, Miembro Canónico de la Academia Real de Poldavia, Gran Maestro de la Orden de los Compactos, Conservador de los Uniformes, Lord Protector de los Filtros, y su esposa (de soltera Biunívoca), tienen el honor de comunicarles el matrimonio de su hija Betti con el Sr. Héctor Pétard, Consejero-Delegado de la Sociedad de las Estructuras Inducidas, Miembro Diplomado del Instituto de Arqueólogos de Cuerpos de Clases, Secretario de la Obra del Sou du Lion.

El señor Ersatz Pondiczery, Complejo de Recubrimiento de Primera Clase (en situación de retiro), Presidente de la Casa de Reeducación de los Débilmente Convergentes, Caballero de las Cuatro U, Gran Operador del Grupo Hiperbólico, Caballero de la Orden Total de la Media Áurea, L.U.B., C.C., H.L.C. y señora (de soltera Compacta en sí), tienen el honor de anunciarles el matrimonio de su pupilo Héctor Pétard, con la señorita Betti Bourbaki, antigua alumna de las Bienordenadas de Besse.

El isomorfismo trivial les será dado por el P.Ádico, de la Orden de los Diofánticos, en la Cohomología principal de la Variedad Universal, el día 3 de Cartiembre, a ño VI, a la hora habitual.

El órgano será interpretado por el Sr. Módulo, Asistente Simplex de la Grassmaniana (lemas cantados por la Escolanía Cartanorum). El importe de la colecta será entregado íntegramente a la casa de Retiro de los Abstractos Pobres. Está garantizada la Convergencia.

Tras la congruencia, el Sr. Bourbaki y señora celebrarán una recepción en sus Dominios Fundamentales.

La recepción estará amenizada por la Fanfarria del 7º Cuerpo de Fracciones.

Traje Canónico (Ideales con abotonadura a la izquierda). C.Q.D.

[| Número 9|](#)
[| Principal Olimpiada |](#)
[Programación OEI | Principal OEI | Contactar](#)

Revista Escolar	de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática	Número 9-Páginas web
	ISSN 1698-677X	

Está en:

OEI - Programación - Olimpiada de Matemática - Revista Escolar de la OIM - Número 9

[Último número](#)[Presentación](#)**NRICH, de la Universidad de Cambridge**[Números anteriores](#)<http://www.nrich.maths.org.uk>[Contactar](#)[Suscripción gratuita](#)

Aunque siempre es aventurado hacer juicios de valor, probablemente esta página de la Universidad de Cambridge sea una de las mejor estructuradas y con una mayor variedad de problemas, proyectos y actividades. Debería ser el modelo en que las facultades de Educación de nuestros países deberían basarse para "colgar" en la red páginas dedicadas a la enseñanza primaria y secundaria, por lo que a las Matemáticas se refiere. Funciona desde 1997, en que fue fundada por Toni Beardon, una Profesora de la Universidad con un gran interés en mejorar la educación matemática de los más pequeños. A su alrededor se ha formado un magnífico grupo de matemáticos e informáticos que, cada mes, ponen a disposición de los internautas una cantidad ingente de problemas, proyectos y lecciones.



Su sección de problemas comprende cinco niveles, según la edad de los alumnos : I, *Let me try* (5-7 años), II, *Penta problems* (7-11 años), III, *The month six* (11-14 años), IV, *15+Challenge* (14-16 años) y V, *Tough Nuts* (16-18 años). Un icono verde en un enunciado significa que se dispone de, al menos, una solución. Un icono azul quiere decir que son posibles generalizaciones y extensiones. Conviene tener en cuenta que debe pasarse a la versión compatible con la impresora, para que no se corten los enunciados.

Cada mes se publican nuevos problemas y las soluciones de los de meses anteriores, casi siempre enviadas por los alumnos, no solo de Inglaterra, si no de todo el Mundo.

Entre los Proyectos que tiene NRICH está el Euro Maths Project, en el que Profesores de tres países (Reino Unido, Dinamarca y Hungría) trabajan en sus escuelas el mismo conjunto de problemas de la página, para comparar diferentes estrategias de resolución de problemas.

La página es demasiado rica para que pueda ser condensada en un comentario...lo mejor es entrar en ella...es realmente fascinante.

Valladolid, septiembre de 2003.
Francisco Bellot Rosado

| Número 9 |
| Principal Olimpiada |
[Programación OEI](#) | [Principal OEI](#) | [Contactar](#)

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

<http://www.campus-oei.org/oim/revistaoidm/>

Edita:

