



# PRIMERA SESIÓN DE PROBLEMAS

21 septiembre de 2004

## Problema 1

Se deben colorear casillas de un tablero de  $1001 \times 1001$  de acuerdo a las reglas siguientes:

- Si dos casillas tienen un lado común, entonces al menos una de ellas se debe colorear.
- De cada seis casillas consecutivas de una fila o de una columna, siempre se deben colorear al menos dos de ellas que sean adyacentes.

Determinar el número mínimo de casillas que se deben colorear.

## Problema 2

Se considera en el plano una circunferencia de centro  $O$  y radio  $r$  y un punto  $A$  exterior a ella. Sea  $M$  un punto de la circunferencia y  $N$  el punto diametralmente opuesto a  $M$ . Hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por  $A$ ,  $M$  y  $N$  al variar  $M$ .

## Problema 3

Sean  $n$  y  $k$  enteros positivos tales que o bien  $n$  es impar o bien  $n$  y  $k$  son pares. Probar que existen enteros  $a$  y  $b$  tales que

$$\text{mcd}(a, n) = \text{mcd}(b, n) = 1 \quad \text{y} \quad k = a + b.$$