



## PRIMEIRA SESSÃO DE PROBLEMAS

21 de setembro de 2004

### Problema 1

Deve-se colorir as casas de um tabuleiro de  $1001 \times 1001$  de acordo com as seguintes regras:

- Se duas casas têm um lado comum então pelo menos uma delas deve ser colorida.
- De cada seis casas consecutivas de uma linha ou de uma coluna, devem colorir-se sempre pelo menos duas delas que sejam adjacentes.

Determinar o número mínimo de casas que devem ser coloridas.

### Problema 2

Se considera no plano uma circunferência de centro  $O$  e raio  $r$ , e um ponto  $A$  exterior a ela. Seja  $M$  um ponto da circunferência e  $N$  o ponto diametralmente oposto a  $M$ . Determinar o lugar geométrico dos centros das circunferências que passam por  $A$ ,  $M$  e  $N$  quando  $M$  varia.

### Problema 3

Sejam  $n$  e  $k$  números inteiros positivos tais que  $n$  é ímpar ou  $n$  e  $k$  são pares. Provar que existem inteiros  $a$  e  $b$  tais que

$$\text{mdc}(a, n) = \text{mdc}(b, n) = 1 \quad \text{e} \quad k = a + b.$$