



SEGUNDA SESSÃO DE PROBLEMAS

22 de setembro de 2004

Problema 4

Determinar todos os pares (a, b) , onde a e b são números inteiros positivos de dois dígitos cada um, tais que $100a + b$ e $201a + b$ são quadrados perfeitos de quatro dígitos.

Problema 5

Dado um triângulo escaleno ABC , se designam por A' , B' e C' os pontos de intersecção das bissectrizes interiores dos ângulos A , B e C com os lados opostos, respectivamente.

Sejam: A'' a intersecção de BC com a mediatriz de AA' ,

B'' a intersecção de AC com a mediatriz de BB' e

C'' a intersecção de AB com a mediatriz de CC' .

Provar que A'' , B'' e C'' são colineares.

Problema 6

Para um conjunto \mathcal{H} de pontos no plano, diz-se que um ponto P do plano é um *ponto de corte* de \mathcal{H} , se existem quatro pontos distintos A , B , C e D em \mathcal{H} tais que as rectas AB e CD são distintas e se cortam em P .

Dado um conjunto finito \mathcal{A}_0 de pontos no plano, se constrói uma sucessão de conjuntos $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \dots$ da seguinte forma: para qualquer $j \geq 0$, \mathcal{A}_{j+1} é a união de \mathcal{A}_j com o conjunto de todos os pontos de corte de \mathcal{A}_j .

Demonstrar que se a união de todos os conjuntos da sucessão é um conjunto finito, então para qualquer $j \geq 1$ tem-se $\mathcal{A}_j = \mathcal{A}_1$.

Duração: 4h 30m.
Cada problema vale sete pontos

Versão em português