XVIII Olimpíada Iberoamericana de Matemática
Segundo Día
17 de septiembre de 2003

4. Sea $M = \{1, 2, \ldots, 49\}$ el conjunto de los primeros 49 enteros positivos. Determine el máximo entero *k* tal que el conjunto *M* tiene un subconjunto de *k* elementos en el que no hay 6 números consecutivos. Para ese valor máximo de *k*, halle la cantidad de subconjuntos de *M*, de *k* elementos, que tienen la propiedad mencionada.

5. En el cuadrado *ABCD*, sean *P* y *Q* puntos pertenecientes a los lados *BC* y *CD* respectivamente, distintos de los extremos, tales que *BP*=*CQ*. Se consideran puntos *X* e *Y*, $X \neq Y$, pertenecientes a los segmentos *AP* y *AQ* respectivamente. Demuestre que, cualesquiera sean *X* e *Y*, existe un triángulo cuyos lados tienen las longitudes de los segmentos *BX*, *XY* y *DY*.

6. Se definen las sucesiones $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ por:

$$a_0 = 1, \quad b_0 = 4 \quad \text{y}$$

$$a_{n+1} = a_n^{2001} + b_n, \quad b_{n+1} = b_n^{2001} + a_n \quad \text{para } n \geq 0.$$

Demuestre que 2003 no divide a ninguno de los términos de estas sucesiones.

Duración: 4½ horas
Cada problema vale siete puntos **Versión en español**