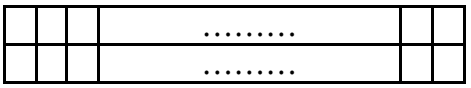
XVIII Olimpíada Ibero-americana de Matemática
Primeiro Dia
16 de Setembro de 2003

1. *a*) Têm-se duas sucessões, cada uma de 2003 inteiros consecutivos, e um tabuleiro de 2 linhas e 2003 colunas



Decida se é sempre possível distribuir os números da primeira sucessão na primeira linha e os da segunda sucessão na segunda linha, de modo que os resultados obtidos ao somar os dois números de cada coluna formem uma nova sucessão de 2003 números consecutivos.

b) E se trocássemos 2003 por 2004?

Tanto em *a*) como em *b*), se a resposta for afirmativa, explique como distribuiria os números, e se for negativa, justifique o porquê.

2. Sejam C e D dois pontos da semicircunferência de diâmetro AB tais que B e C estão em semiplanos distintos em relação à recta AD. Denotemos por M, N e P os pontos médios de AC, DB e CD, respectivamente. Sejam O_A e O_B os circuncentros dos triângulos ACP e BDP. Demonstre que as rectas O_AO_B e MN são paralelas.

3. Pablo copiava o seguinte problema:

Considere todas as sucessões de 2004 números reais $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{2003})$, *tais que*

$$x_0 = 1,$$
$$0 \le x_1 \le 2x_0,$$
$$0 \le x_2 \le 2x_1,$$
$$\vdots$$
$$0 \le x_{2003} \le 2x_{2002}.$$

Entre todas estas sucessões, determine aquela para a qual a expressão seguinte assume o seu maior valor: $S = \cdots$.

Quando Pablo ia copiar a expressão S, apagaram o quadro. Só conseguia lembrar-se de que S era da forma

$$S = \pm x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_{2002} + x_{2003},$$

onde o último termo, x_{2003}, tinha coeficiente +1, e os anteriores tinham coeficiente +1 ou –1. Demonstre que Pablo, apesar de não ter o enunciado completo, pode determinar com certeza a solução do problema.

Duração: 4½horas
Cada problema vale sete pontos **Versão em português**