

**XVIII Olimpíada Ibero-americana de Matemática**  
**Segundo Dia**  
**17 de Setembro de 2003**

4. Seja  $M = \{1, 2, \dots, 49\}$  o conjunto dos primeiros 49 inteiros positivos. Determine o maior inteiro  $k$  tal que o conjunto  $M$  tenha um subconjunto de  $k$  elementos em que não haja 6 números consecutivos. Para esse valor máximo de  $k$ , encontre a quantidade de subconjuntos de  $M$ , de  $k$  elementos, que tenham a propriedade mencionada.
5. No quadrado  $ABCD$ , sejam  $P$  e  $Q$  pontos pertencentes aos lados  $BC$  e  $CD$  respectivamente, distintos dos extremos, tais que  $BP=CQ$ . Consideram-se pontos  $X$  e  $Y$ ,  $X \neq Y$ , pertencentes aos segmentos  $AP$  e  $AQ$  respectivamente. Demonstre que, quaisquer que sejam  $X$  e  $Y$ , existe um triângulo cujos lados têm os comprimentos dos segmentos  $BX$ ,  $XY$  e  $DY$ .
6. Definem-se as sucessões  $(a_n)_{n \geq 0}$ ,  $(b_n)_{n \geq 0}$  por:

$$a_0 = 1, \quad b_0 = 4 \quad \text{e}$$
$$a_{n+1} = a_n^{2001} + b_n, \quad b_{n+1} = b_n^{2001} + a_n \quad \text{para } n \geq 0.$$

Demonstre que 2003 não divide nenhum dos termos destas sucessões.

**Duração: 4½ horas**  
**Cada problema vale sete pontos**

**Versão em português**